Departamento de Ciência da Computação – IME/USP
Otimização Combinatória

Professor: Carlos Eduardo Ferreira
Sala 108C, Tel.: 3091-5526, e-mail: `cef@ime.usp.br`

Monitor: Fernando Mario de Oliveira Filho
e-mail: `fmario@ime.usp.br`

Primeira Lista de Exercícios
Árvores Geradoras Mínimas
Data de Entrega: 17/09/2004

Notação

Se $G = (V, E)$ é um grafo, V é seu conjunto de vértices e E seu conjunto de arestas. Se $E' \subseteq E$ então (V, E') também é um grafo, sendo um *subgrafo gerador* de G. Também denotamos por $V(G)$ $(E(G))$ o conjunto de vértices (arestas) de um grafo G.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $S \subseteq V$. Denotamos por $\delta(S)$ o conjunto das arestas que têm exatamente uma ponta em S.

Denotamos por $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não-negativos.

Exercícios

1. (10 pts) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e T_1, T_2 duas árvores geradoras de G. Mostre que podemos transformar T_1 em T_2 aplicando repetidamente a seguinte operação: remova uma aresta de T_1 e adicione uma aresta que liga os dois componentes da floresta resultante.

2. (30 pts) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, $c\colon E \to \mathbb{R}$ uma função de custos e T_1, T_2 duas árvores geradoras mínimas de G.

(a) (10 pts) Mostre que o custo da maior aresta de T_1 é igual ao custo da maior aresta de T_2.

(b) (15 pts) Mostre que podemos transformar T_1 em T_2 aplicando repetidamente a seguinte operação: remova uma aresta de T_1 e adicione uma aresta com o mesmo custo da removida que liga os dois componentes da floresta resultante.

(c) (5 pts) Mostre que as seqüências dos custos das arestas de T_1 e T_2, quando colocadas em ordem crescente, são iguais.

3. (25 pts) O primeiro algoritmo para o problema da árvore geradora mínima foi proposto por O. Borůvka em 1929. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $c\colon E \to \mathbb{R}$ uma função custo. O algoritmo de Borůvka é o seguinte:

(i) $S := \emptyset$;
(ii) se (V, S) possui um só componente, devolva (V, S);
(iii) senão, sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k$ os conjuntos de vértices dos componentes de (V, S). Para $i = 1, \ldots, k$, seja e_i a aresta de menor custo em $\delta(C_i)$. Adicione as arestas $e_1, \ldots, e_k$ ao conjunto S e vá para o passo (ii).

(a) (15 pts) Mostre que, se os custos são todos distintos, o algoritmo de Borůvka devolve uma árvore geradora mínima e argumente que o algoritmo é polinomial.

(b) (5 pts) Mostre um exemplo no qual os custos não são todos distintos para o qual o algoritmo pode falhar em encontrar uma árvore geradora mínima.

(c) (5 pts) Proponha uma modificação do algoritmo que elimine o problema apresentado no item (b).

4. (40 pts) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $c\colon E \to \mathbb{R}$ uma função custo. Dados $u, v \in V$, denote por $\mathcal{P}(u, v)$ a coleção de todos os (u, v)-caminhos em G. O *gargalo* entre u e v no grafo G é

$$b_G(u, v) := \min_{P \in \mathcal{P}(u,v)} \max\{c_e \colon e \in E(P)\}.$$

(a) (20 pts) Mostre que uma aresta $e = uv$, $e \in E$, pertence a alguma árvore geradora mínima de G sse $b_G(u, v) = c_e$.

(b) (20 pts) Prove que T é uma árvore geradora mínima de G sse $b_G(u, v) = b_T(u, v)$ para todo par de vértices $u, v \in V$.

5. (40 pts) Se H é um grafo com custos não-negativos nas arestas e $u, v \in V(H)$, denotaremos por $d_H(u, v)$ a *distância* entre os vértices u e v em H, ou seja, o custo de um (u, v)-caminho mínimo em H.

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com custos nas arestas dados por uma função custo $c\colon E \to \mathbb{R}_+$. Uma árvore geradora T de G é *α-geradora*, $\alpha \geq 1$, se $d_T(u, v) \leq \alpha d_G(u, v)$ para todo par de vértices $u, v \in V$.

(a) (15 pts) Mostre que toda árvore geradora mínima de G é $(n-1)$-geradora, onde $n := |V|$.

(b) (5 pts) Para cada $\alpha \geq 1$ mostre um grafo para o qual nenhuma árvore geradora é α-geradora.

(c) (20 pts) [Cai & Corneil '91] Se T é uma árvore 1-geradora de G então T é uma árvore geradora mínima.

6. (30 pts) Seja E um conjunto finito de vetores. Dizemos que um conjunto $A \subseteq E$ é um *circuito* se A é linearmente dependente e minimal, i.e., se A é linearmente dependente mas qualquer subconjunto próprio de A é linearmente independente.

(a) (10 pts) Seja $A \subseteq E$ um conjunto linearmente independente e $e \in E \setminus A$. Mostre que $A \cup \{e\}$ tem no máximo um circuito.

(b) (20 pts) Considere o seguinte problema: dado um conjunto finito de vetores E e uma função custo $c\colon E \to \mathbb{R}$, encontrar um subconjunto linearmente independente de E que tenha custo máximo. Mostre que o algoritmo guloso pode ser usado para resolver este problema. O que você precisa supor para que o algoritmo seja polinomial?

7. (40 pts) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $c\colon E \to \mathbb{R}$ uma função custo. Considere o seguinte programa linear:

$$\begin{array}{lrcll} \text{maximizar} & cx & & & \\ \text{sujeito a} & x(E) & = & n-1, & \\ & x(E(S)) & \leq & |S|-1, & \text{para todo } S \subseteq V,\ S \neq \emptyset, \\ & x & \geq & \mathbf{0}. & \end{array} \tag{1}$$

(a) (10 pts) Mostre que o vetor característico do conjunto de arestas de qualquer árvore geradora de G é viável em (1).

(b) (20 pts) Mostre que se T é uma árvore geradora máxima então o vetor característico de seu conjunto de arestas é uma solução ótima de (1).

(c) (10 pts) Seja $P \subseteq \mathbb{R}^E$ o politopo que consiste dos vetores $x \in \mathbb{R}^E$ que satisfazem as inequações em (1). Mostre que todos os vértices de P são vetores característicos do conjunto de arestas de árvores geradoras de G.