MAC–IME–USP

Carlos Eduardo Ferreira
Sala 297A Tel.: 818 6140
e-mail cef@ime.usp.br

MAC 122 – Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos

Segundo semestre de 1997

Lista de exercícios—Recursão

"Para fazer um procedimento recursivo
é preciso ter fé."
Siang Wun Song

1. (a) Faça um procedimento recursivo MaxMin que calcula o elemento máximo e o elemento mínimo de um vetor com n números inteiros.
   (b) Quantas comparações (em função de n) envolvendo elementos do vetor o seu algoritmo faz? Justifique!

2. Faça um procedimento recursivo Dígito que recebe um número inteiro n e calcula a soma dos digitos de n. Exemplo: se $n = 132$ então Dígito$(n) = 6$.

3. (a) Faça um procedimento recursivo que verifica se uma expressão de parênteses é bem formada.
   (b) Idem para uma expressão com parênteses, colchetes ('[','I') e chaves ('{','}').

4. Considere a função abaixo:

```
static double f( double x, double y)
{
  if (x >= y) return ( (x+y)/2 );
  else return( f( f(x+2, y-1), f(x+1, y-2)));
}
```

   Qual é o valor de $f(1, 10)$? Como se poderia calcular $f(a, b)$ de maneira mais simples?

5. Simule a execução do programa abaixo:

```
public class Exercicio
{
  static int Fusc ( int n )
  {
    if ( N == 1 ) return(1);
    else if (N % 2 == 0)  return( Fusc (n / 2) );
         else return( Fusc( (n - 1)/2 ) + Fusc( (n+1)/2 );
  }
```

```
  public static void main( String [] in )
  {
    System.out.println(Fusc(7));
  }
}
```

6. A função de Akermann é definida da seguinte maneira:

$$A(m,n) := \begin{cases} n+1 & \text{se } m = 0, \\ A(m-1,1) & \text{se } m > 0 \text{ e } n = 0, \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{se } m, n > 0. \end{cases}$$

   Escreva uma função recursiva que recebe inteiros não negativos m e n e devolve $A(m,n)$.

7. Considere a seguinte função:

```
static void Misterio( vetor A, int Inicio, int Fim)
{
  int Aux;

  while (A[Fim] % 2 == 0 && Inicio < Fim)
    Fim--;
  while (A[Inicio]% 2 == 1 && Inicio < Fim)
    Inicio++;
  if (Inicio < Fim)
  {
    Aux       = A[Inicio] ;
    A[Inicio] = A[Fim]    ;
    A[Fim]    = Aux       ;
    Misterio(A, Inicio, Fim) ;
  }
}
```

   (a) Simule o procedimento Mistério para

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A =$	8	10	3	6	5	2	9	1	4

   Inicio$= 1$ e Fim $= 9$.

   (b) O que faz o procedimento Mistério? Quantas comparações envolvendo elementos do vetor A são feitas? Escreva um algoritmo que faz a mesma coisa com um número menor de comparações.

8. Simule a seguinte função recursiva para $N = 6$:

```
static int Fibo (int N)
{
  int Aux;
  if (N <= 2) return (1);
```

```
    else {
      N--; Aux := Fibo1(N);
      N--; return( Aux + Fibo1(N) );
    }
  }
```

9. Escreva um procedimento recursivo Tab(N, X, Y) que recebe como parâmetro um inteiro não negativo N e calucula um par de inteiros (X, Y), onde X e Y são as coordenadas de N na tabela abaixo:

	0	1	2	3	4	...	Y
0	0	2	5	9	14		
1	1	4	8	13			
2	3	7	12				
3	6	11					
4	10						
...							
X							N

10. Suponha que temos de calcular o produto de matrizes

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n,$$

onde cada M_i é uma matriz com r_i linhas e r_{i+1} colunas. (Portanto, $r_1, \ldots, r_{n+1}$ descrevem as dimensões das matrizes.) Suponha ainda que o produto de qualquer par de matrizes será calculado pelo algoritmo usual; assim o produto de uma matriz $p \times q$ por uma matriz $q \times r$ requer $p \times q \times r$ operações de multiplicação entre números. A ordem em que a multiplicação de três ou mais matrizes é executada pode afetar sensivelmente o número total de multiplicações. Por exemplo, se $n = 4$ e $(r_1, \ldots, r_5) = (10, 20, 50, 1, 100)$ então o cálculo da expressão $M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times M_4))$ requer 125000 multiplicações enquanto que o cálculo da expressão $M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4$ requer 2200 multiplicações. Seja $m_{i,j}$ o número mínimo de multiplicações necessárias para calcular $M_i \times \cdots \times M_j$. Temos que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \min_{i \leq k \leq j}\{m_{i,k} + m_{k+1,j} + r_i \times r_{k+1} \times r_{j+1}\} & \text{se } i < j. \end{cases}$$

Escreva um procedimento recursivo que recebe n e a seqüência $(r_1, \ldots, r_{n+1})$ e calcula $m_{1,n}$.

11. Escreva um procedimento que dado n imprime todas as permutações dos números inteiros $1, \ldots, n$. Escreva duas versões, uma iterativa e uma recursiva. (Sugestão: O conjunto das permutações dos inteiros $1, \ldots, n$ pode ser obtida através do conjunto das permutações dos inteiros de $1, \ldots, n-1$ inserindo-se n em cada possível posição de cada permutação.)

12. Escreva um procedimento que dados dois inteiros positivos n e k imprima todas as combinações de $1, \ldots, n$ em grupos de tamanho k. Escreva duas versões, uma iterativa e outra recursiva.

13. Escreva um programa para imprimir em ordem lexicográfica todos os subconjuntos do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Para $n = 4$ o resultado deve ser:

$$\emptyset\ \{1\}\ \{1,2\}\ \{1,2,3\}\ \{1,2,3,4\}\ \{1,2,4\}\ \{1,3\}\ \{1,3,4\}$$
$$\{1,4\}\ \{2\}\ \{2,3\}\ \{2,3,4\}\ \{2,4\}\ \{3\}\ \{3,4\}\ \{4\}.$$

14. O seguinte procedimento calcula o maior divisor comum dos inteiros positivos m e n. Escreva um procedimento recursivo equivalente.

```
static int Euclides (int M, int N)
{
  int R;
  do{
      R = M % N;
      M = N;
      N = R;
  }
  while (R != 0)
  return(M);
}
```