MOMENTO DE INÉRCIA, DE MASSA OU DE ÁREA?

SILVA; Adriano de Aquino Paiva

Adriano.aquino@hotmail.com

Faculdade de Tecnologia de Mogi-Mirim

Resumo - Este artigo apresenta e explica o *Momento de Inércia* utilizado no estudo ciências exatas. O *Momento de Inércia de Área*, usado no estudo de deformação aplicado em projetos de estrutura, muitas vezes é confundido com o*Momento de Inércia de Massa*, que aparece na dinâmica dos corpos rígidos. Seus desenvolvimentos são semelhantes em muitos aspectos, mas suas aplicações são diferentes.

Palavras-chave: Momento de inércia, momento de inércia de área, momento de inércia de massa.

Abstract - This article introduces and explains the M*oment of Inertia* used in the study of exacts sciences. The *Moment of Inertia of Area*, used in the study of deformation applied in project design, it is often confused with the Moment of*Inertia of Mass*, which appears in the dynamics of rigid bodies. Their developments are similar in many aspects, but their applications are different.

Keywords: moment of inertia, moment of inertia of area.

Introdução

Esse artigo traz algumas deduções e explicações relacionadas ao cálculo de Momento de Inércia, muito conhecido por estudantes de Engenharia, Tecnologia e Física, esse cálculo é essencial para a resolução de diversos problemas da física e para os mais variados tipos de dimensionamentos para tecnólogos e engenheiros. Apresentaremos o conceito dos dois tipos de Momento de Inércia.

Momento de Inércia de Massa

Resistência oposta por um corpo em rotação a uma mudança em sua velocidade de giro. Às vezes, recebe a denominação de inércia rotacional. O momento de inércia desempenha na rotação um papel equivalente ao da massa no movimento linear. Por exemplo, se uma catapulta lança uma pedra pequena e uma grande, aplicando a mesma força a cada uma, a pedra pequena terá uma aceleração muito maior que a da grande. De modo similar, se é aplicado um mesmo par de forças a uma roda com um momento de inércia pequeno e a outra com um momento de inércia grande, a velocidade de giro da primeira roda aumentará muito mais rapidamente que a da segunda.

O momento de inércia de um objeto depende de sua massa e da distância da massa ao seu eixo de rotação. Por exemplo, um volante de 1 kg com a maior parte de sua massa perto do eixo terá um momento de inércia menor que outro volante de 1 kg com a maior parte da massa próxima à borda. O momento de inércia de um corpo não é uma quantidade única e fixa. Se um objeto é girado em torno de eixos diferentes, também terá momentos de inércia diferentes, uma vez que a distribuição de sua massa em relação ao novo eixo é normalmente distinta do que era no anterior.

O módulo de velocidade de uma partícula em um corpo rígido rodando em torno de um eixo fixo é:

Onde:

$v = r\omega$ r distância ao eixo de rotação

(01) ω velocidade angular

A energia cinética de uma partícula de massa m é:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (02)$$

Aplicando *(1)* em *(2)* temos que:

$$E_c = \frac{1}{2} m (r\omega)^2 = \frac{1}{2}\left(mr^2\right)\omega^2 \quad (03)$$

Assim, para um corpo rígido, a energia cinética rotacional será a soma das energias cinéticas de todas as partículas que constituem o corpo.

$$E_{cr} = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right) \quad (04)$$

Onde o termo entre parênteses se refere ao modo como a massa se distribui em torno do eixo de rotação. Este termo designa-se por *momento de Inércia* (ou inércia rotacional) I , do corpo em relação ao eixo de rotação, e é um valor**constante** para uma dada geometria e eixo de rotação.

Explicitando I a partir de *(04)* temos que:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \quad (05) \text{ e } E_{cr} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (06)$$

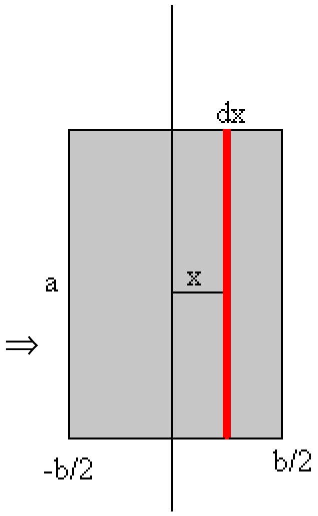
Se o corpo rígido for constituído por um elevado número de partículas adjacentes, este cálculo é feito através de um integral em ordem à **massa**.

$$I = \int r^2 dm \quad (07)$$

Ou como encontrado em muitas literaturas

$$I = \int x^2 dm \quad (08)$$

Momento de inércia de massa de uma placa retangular
Vamos calcular o momento de inércia de uma placa retangular delgada de massa *M* de lados *a* e *b* relativo ao eixo que passa pela placa.



Tomamos uma derivada de massa, ou seja, um pequeno elemento de massa que dista *x* do eixo de rotação. O elemento é um retângulo de comprimento *a* de largura *dx*. A massa deste retângulo é:

$$dm = \frac{M}{ab} adx$$

$$dm = \frac{M}{b} dx$$

$$I_c = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{M}{b} x^2 dx \quad I_c = \frac{M}{b} \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx$$

$$I_c = \frac{M}{b} \frac{x^3}{3} \Big|_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{M}{b} \left[\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^3}{3} \right]$$

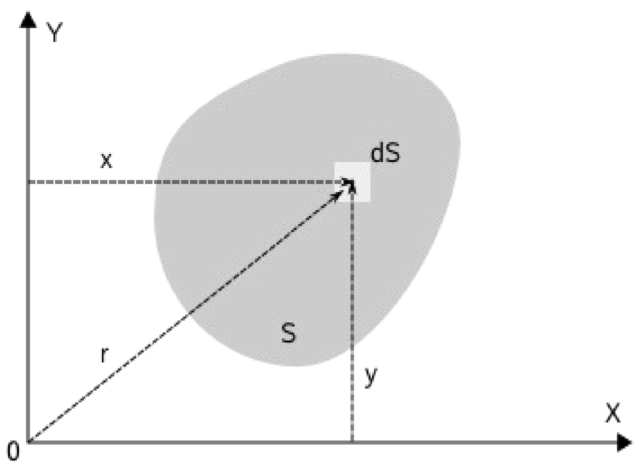
$$I_c = \frac{M}{b} \left[\frac{b^3}{8.3} + \frac{b^3}{8.3} \right] = \frac{M}{b} \frac{b^3}{12} \Rightarrow \frac{1}{12} Mb^2$$

$$\therefore I_c = \frac{M}{b} \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx = \frac{1}{12} Mb^2$$

Momento de Inércia de Área

O Momento de Inércia de Área ou Momento de Segunda Ordem de Área é uma propriedade de uma seção plana de um corpo, que tem relação com a resistência à deformação. Apesar da semelhança em formulação e em alguns teoremas, não deve ser confundido com *momento de inércia de massa*, que é usado no estudo da rotação de corpos rígidos. É comum o mesmo símbolo (I) para ambos, mas a distinção fica normalmente clara no contexto e nas unidades físicas. Neste artigo, será usado o símbolo J para o momento de inércia de área.

Em Engenharia, é usual o emprego da expressão reduzida momento de inércia para designar o momento de inércia de área.



Seja, conforme Figura ao lado, uma superfície plana genérica de área S e um sistema de coordenadas ortogonais XY. Os momentos de inércia em relação a cada eixo são dados por:

$$J_x = \int y^2 ds \quad (09)$$

$$J_y = \int x^2 ds \quad (10)$$

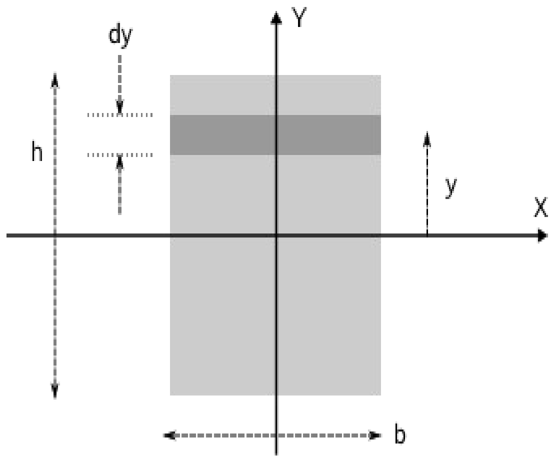
Note que a derivada neste caso é em relação à ds , ou seja, a derivada é em função da **área**, e não da massa como visto anteriormente. Em algumas literaturas se encontra também a notação a seguir:

$J_x = \int y^2 da$ *(11)*

$J_y = \int x^2 da$ *(12)*

Usaremos a notação *(09)* e *(10).*

Momento de inércia de área de uma placa retangular



Tomamos uma derivada de área, o elemento é um retângulo de comprimento *dy e a* de largura *b*. A área desse retângulo é:

$da = bdy$

Aplicando a equação *(09) tem-se:*

$$J_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 bdy \Rightarrow J_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy$$

$$J_x = b\frac{y^3}{3}\bigg|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b\left[\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3}\right]$$

$$J_x = b\left[\frac{h^3}{8.3} + \frac{h^3}{8.3}\right] = b\frac{h^3}{12} \Rightarrow \frac{bh^3}{12}$$

$$\therefore J_x = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 ds = \frac{bh^3}{12}$$

Conclusões

Pode-se observar que o desenvolvimento das duas equações é muito semelhante, o que ocasiona interpretações errôneas quanto as suas aplicações, mas fica claro na equação quanto à derivada da integral, que as distinguem em derivada da massa dm *, para Momento de Inércia de Massa, que é aplicado a problemas de rotação e dinâmica dos corpos rígidos, e a derivada da área* ds , para Momento de Inércia de Área, que se utiliza em dimensionamento de estruturas que são sujeitas a deformação.

Referências

1.E.RUSSELL JOHNSTON JR. FERDINAND P. BEER - Editora Makron Books (Grupo Pearson)

1.Halliday D, Resnick R, Walker J; Fundamentos de Física – Mecânica, 7ªed. Editora LTC, 2006

1.Instituto Superior de Engenharia do Porto – Departamento de física, Momentos de Inércia e Teorema de Steiner;http://www.defi.isep.ipp.pt

1.Tipler P, Mosca G; Física para cientistas e engenheiros, 5ª ed.vol 1. Editora LTC, 2006