



Centro de Aperfeiçoamento do
Ensino de Matemática
"João Affonso Pascarelli"

Mostra do CAEM 2017

19 a 21 de outubro, IME-USP

OFICINA 2

TRAGA O ALEATÓRIO PARA SUA AULA

Marcos N. Magalhães (marcos@ime.usp.br)¹

Resumo

Na vida cotidiana o aleatório está presente em muitas situações. Na Educação Básica é fundamental que o professor de Matemática, quando discute conceitos probabilísticos e estatísticos com seus estudantes, incorpore esse conceito em suas aulas com as interpretações corretas. Nessa oficina vamos apresentar exemplos de fenômenos aleatórios, discutir sobre diferentes abordagens e realizar atividades que envolvem a incerteza, possibilitando participação dos estudantes e avanços na aprendizagem. Os participantes terão oportunidade de efetivamente realizar atividades que, posteriormente, poderiam ser desenvolvidas em suas classes. Essas atividades estão, ou estarão, disponíveis no portal AtivEstat, de acesso livre por meio da página do IME-USP.

Palavras-chave

Aleatório; Atividades; Estatística.

¹ Departamento de Estatística do IME-USP.

1. Introdução

Seria o mundo determinístico?

Padrões são buscados em várias situações: funcionamento de equipamentos, medições de peças, desempenho de motores, tempo de viagens, recuperação de cirurgias, validade de medicamentos, comportamento de animais, opiniões, etc. Números são utilizados para sintetizar as informações. Estão presentes em recomendações técnicas na indústria, bulas de remédios, validade de alimentos, notícias na imprensa, opiniões na TV, propaganda política, artigos científicos, etc.

Note que situações podem se repetir produzindo respostas diferentes. Na realização de vários fenômenos, a variabilidade está sempre presente desafiando a tendência determinística de fixar números.

Para muitos a Estatística cresceu como área porque existe a variabilidade. Foi necessário desenvolver técnicas para estudar a variação e, de alguma forma, conseguir controlar seus efeitos. É preciso distinguir entre situações determinísticas e aleatórias: qual é a resposta da equação $2x + 3 = 9$? Quanto tempo leva escovando os dentes? Ontem e hoje foi o mesmo tempo? Uma equação matemática com solução única terá sempre a mesma resposta não importando o método utilizado na sua resolução. Em fenômenos aleatórios, a repetição pode produzir respostas diferentes.

O mundo está longe de ser determinístico!

Estatística, incluindo Probabilidade, faz parte do ensino de Matemática, conforme indicações oficiais- Parâmetros Curriculares Nacionais do MEC (Brasil, 1998). Existem dificuldades na formação estatística do professor de Matemática que, quase sempre, enfatiza mais o pensamento determinístico. De modo geral, buscamos na Educação Básica a alfabetização estatística dos estudantes, que compreende entender diagramas e gráficos, avaliar informações e comparar resultados (todos referentes aos conceitos previstos de Probabilidade e Estatística). Com reflexos em toda sociedade, a alfabetização estatística é uma questão de cidadania.

Algumas recomendações para o ensino de Estatística são as seguintes:

- a) enfatizar ideias ao invés de cálculos;
- b) trabalhar com dados reais e de interesse dos estudantes;
- c) incentivar a participação;

- d) usar recursos tecnológicos;
- e) avaliar como instrumento de aprendizagem.

2. Objetivos

O objetivo da oficina *Traga o aleatório para a sua aula* é discutir o conceito de aleatório em Estatística e apresentar atividades práticas que auxiliam na sua compreensão. Dessa forma esperamos contribuir para que o conceito faça parte, efetivamente, das aulas de Matemática na Educação Básica.

3. Visão estatística

A Estatística trata o aleatório usando o método científico. Não existe o sempre "sortudo" ou "azarado", o que existe é o acaso e ele se relaciona à probabilidade. Em fenômenos aleatórios, as ocorrências dependem da probabilidade associada a cada uma das possíveis respostas. Note que isto não significa que os resultados são equiprováveis. Dizemos que a expressão do aleatório é a variabilidade dos resultados obtidos. Em Estatística, se fazemos uma escolha ao acaso de um elemento em uma população, estamos escolhendo sem preferência dentre todos os que são possíveis. Isto é, todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de serem escolhidos. As vezes, abusamos da linguagem e dizemos *escolha aleatória* para se referir à *escolha ao acaso*.

Em seguida, apresentamos um breve sumário de alguns conceitos estatísticos que auxiliam no entendimento do aleatório. Detalhes desses conceitos podem ser consultados em Magalhães e Lima (2015).

Dentre as definições de Probabilidade destacamos:

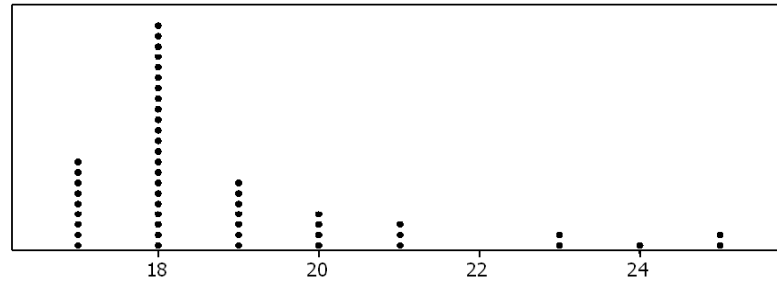
Clássica: $P(A)$ = quociente entre o número de elementos em A e o número total. Se A não for enumerável, o conceito se aplica ao comprimento de intervalos, medida de áreas ou similares (probabilidade geométrica).

Frequentista ou *Estatística*: $P(A)$ = limite ($n \rightarrow \infty$) da frequência relativa de ocorrências do evento A em n repetições.

Tabelas e gráficos são recursos importantes: tabela de dados brutos contém a listagem dos dados conforme foram coletados; tabela de frequência (simples ou de dupla entrada) é construída agregando os valores comuns, sendo que para as variáveis

contínuas usamos faixas de valores. Existem vários tipos de gráficos (setores, pontos, barras, histogramas, etc.) e na Figura 1 mostramos um exemplo de gráfico de pontos. Na Figura 2 apresentamos, após a definição de quantis, o gráfico de caixa (*box-plot*).

Figura 1: Exemplo de gráfico de pontos.



Apresentamos a seguir medidas resumo de tendência central:

Média (média aritmética) é o valor de equilíbrio dos dados:

$$\bar{x}_{obs} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (\text{dados brutos})$$

$$\bar{x}_{obs} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i \quad (\text{tab. de freq. - } k \text{ valores})$$

Mediana é valor central quando os dados estão ordenados. Caso haja número par de observações, use o ponto médio das duas observações centrais.

Moda é o valor mais frequente do conjunto de dados.

Algumas medidas resumo de dispersão são as seguintes:

Amplitude é a distância entre o máximo e o mínimo das observações.

Variância é a média de desvios ao quadrado (desvios em relação à média):

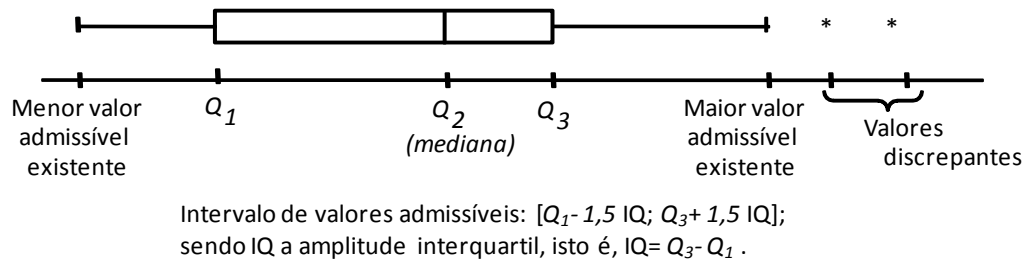
$$var_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{obs})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2 \quad (\text{dados brutos})$$

$$var_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_{obs})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2 \quad (\text{tab. de freq. - } k \text{ valores})$$

Desvio Padrão é a raiz quadrada positiva da variância.

Quantil é o valor que divide os dados em certas proporções. Exemplos: 1º quartil (separa os primeiros 25%), 2º quartil (divide em 50% para cada lado), etc.

Figura 2: Exemplo de gráfico de caixa (*boxplot*).



Realização de estimação é um dos principais objetivos da Estatística. Denominamos de *parâmetros* alguma característica, tais como média e proporção, que podem ser de interesse em uma população. Para obter uma ideia de seus valores coletamos uma amostra da população e, por meio de técnicas de inferência estatística, fazemos sua estimação. Por exemplo, considerando o salário de professores numa cidade e desejando informações sobre a média de salários (*parâmetro* média populacional), coletaríamos uma amostra para calcular a média da amostra de salários (*estimador* média amostral). Em uma particular amostra seu valor é denominado uma *estimativa* da média populacional. De modo análogo, para a proporção de certa característica na população, a proporção amostral seria o estimador e, em uma particular amostra temos a estimativa correspondente.

4. Atividades

Para o ensino de Estatística na Educação Básica desenvolver atividades é muito importante, além de ser uma oportunidade especial de enfatizar o aleatório nas aulas.

Apresentamos a seguir algumas atividades em Estatística que estão, ou estarão, presentes no portal *AtivEstat* do IME-USP (www.ime.usp.br/ativestat). Nesse portal as atividades são divididas em cinco tipos: Sala de aula, Miniaplicativos, Planilhas, Proposta de projetos e Filmes e vídeos. No Apêndice 1 listamos alguns portais com atividades de Estatística.

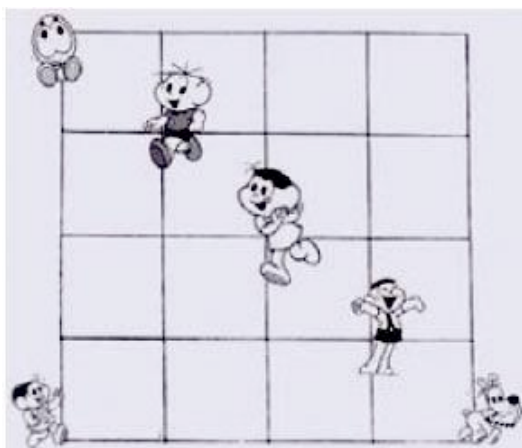
4.1 Atividades do tipo Sala de aula

São atividades desenvolvidas em classe em poucas aulas com recursos simples.

a. Passeios aleatórios de Carlinha (atividade SA09)

Carlinha (era Mônica, mas trocou por problemas de direitos autorais) quer visitar seus amiguinhos, mas só pode se mover para o norte ou para o leste (ver Figura 3).

Figura 3: Caminhos para as visitas de Carlinha.



Cada movimento é decidido pelo lançamento de uma moeda (que é assumida como equilibrada). Dependendo das direções escolhidas em cada movimento, ela consegue visitar um dos seus amigos que são (de cima para baixo): Horácio (H), Cebolinha (C), Magali (M), Cascão (Ca) e Bidu (B). Qual amigo é mais provável de ser visitado?

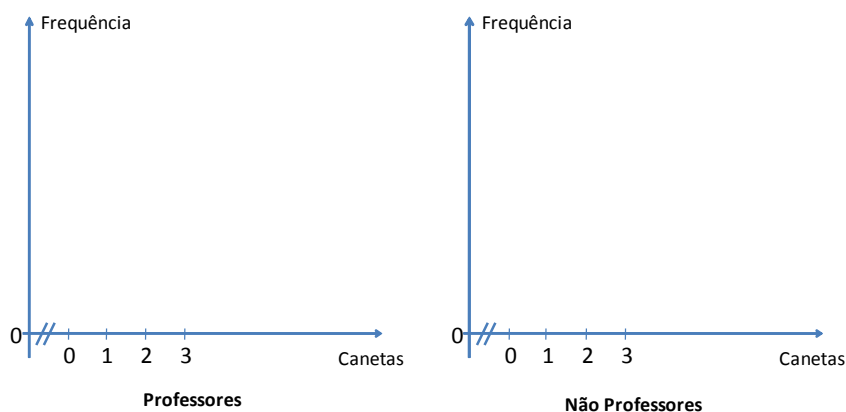
Durante a atividade, os estudantes fazem experimentos simulando o passeio de Carlinha e constroem gráficos e tabelas com as frequências relativas obtidas. Ao final da atividade está previsto formalizar os conceitos probabilísticos envolvidos. Nesta oficina vamos realizar o passeio 10 vezes e anotar na tabela abaixo o amigo visitado.

Passeio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amigo										

Quer mudar sua resposta sobre o amigo mais visitado?

b. Professor e canetas

Com os dados coletados na oficina, faça um gráfico de frequência da variável Número de canetas (N) para cada resposta, Sim ou Não, da variável Professor (P).



Suponha agora que esses dados são de uma população. Colete uma amostra ao acaso de tamanho 5, com reposição, e anote os resultados na tabela abaixo:

Professor	1	2	3	4	5	Professor	1	2	3	4	5
Nº de canetas						Nº de canetas					

Desenhe abaixo a caixa central do *box-plot*. Use que, com as observações ordenadas, o 1º Quartil é a 2ª observação; Mediana a 3ª e o 3º Quartil a 4ª observação.

Professor

Não professor



Os professores têm mais canetas?

c. Cidade feliz? (atividade SA08)

Esta atividade explora a Inferência Estatística Informal, buscando uma estimativa para um parâmetro de interesse, no caso, a de proporção de pessoas felizes na cidade. A figura do Apêndice 2 representa a população de uma cidade que contém dois tipos de pessoas: felizes e tristes. Elas são representadas por dois *emoticons* (feliz e triste) que estão espalhados de maneira não uniforme (aleatória) na figura. Sem realizar a contagem, os participantes da oficina em dupla devem usar alguma estratégia "criativa" para avaliar a proporção de pessoas felizes. A estimativa obtida é _____ .

Afinal, temos uma cidade feliz?

4.2 Atividades do tipo Miniaplicativo

São programas computacionais que realizam de forma rápida, interativa e com apelo visual, cálculos ou representações gráficas.

a. Problema das portas -Monty Hall (atividade MA27)

A atividade é baseada no chamado problema de Monty Hall, ou problema das portas, que ficou muito famoso nos EUA por conta do programa de TV *Let's Make a Deal*. Nesse programa, o apresentador (Monty Hall) mostra três portas fechadas (uma tem prêmio) e pede ao participante que escolha uma delas. O apresentador, que sabe a porta com prêmio, abre uma das outras e pergunta se quer manter ou trocar a sua escolha inicial. Após a decisão do participante, o apresentador revela a porta com o prêmio.

Pode-se usar um minia aplicativo para simular esse problema. Acesse o link: <http://eduardolopes.github.io/monty-hall-problem/pt-br/>. Após realizar algumas jogadas com os participantes da oficina surge a questão: é melhor trocar ou não de porta?

b. Nomes do Brasil (atividade MA22)

Este é um aplicativo do IBGE que fornece a incidência de nomes de brasileiros conforme coletados no Censo de 2010. São disponíveis informações de frequência, nascimentos por década, distribuição por unidades da federação e nomes mais populares. É possível filtrar a frequência do nome pesquisado por unidade federativa e, também, por município. Acesse o link <https://censo2010.ibge.gov.br/nomes/#/search>.

Qual é a probabilidade de encontrar um xará?

4.3 Atividades do tipo Planilha

São atividades que necessitam o uso de computador e é para serem feitas em laboratórios de informática ou em casa. Alguns *software* livres, como OpenOffice e LibreOffice, contêm programas de planilha com comandos similares ao do Excel.

a. Simulação de lançamentos de uma moeda equilibrada

Usando as funções ALEATÓRIOENTRE(1;2) e CONT.SE(A1:A25;1) é possível simular lançamentos de uma moeda equilibrada. Na tabela abaixo, anote os resultados da simulação de 25 e 100 lançamentos. A moeda lançada é equilibrada?

Nº de lançamentos	Nº de caras	Frequência relativa
25		
100		

4.4 Atividades do tipo Filmes e vídeos

São atividades que requerem recursos multimídia, com acesso à internet, e podem ser usadas em classe ou em laboratório de informática.

a. Coisa de passarinho (atividade FV24)

Neste vídeo, do projeto Matemática Multimídia da Unicamp, um rapaz se acha sem sorte e questiona alguns acontecimentos do seu cotidiano. Por meio de uma conversa com seu pai, o conceito de probabilidade e sua importância são discutidos. Acesse <https://www.youtube.com/watch?v=EuPGf5ul6y0&feature=youtu.be>.

Como anda a relação de vocês com os passarinhos?

5. Considerações Finais

É possível apresentar o conceito de aleatório na Educação Básica. Apesar de algumas dificuldades que o professor possa ter com esse conteúdo, desenvolver atividades pode ser uma alternativa para possibilitar maior discussão sobre o assunto. Nesta oficina, apresentamos várias atividades que podem ser usadas com bons resultados na aprendizagem desse importante conceito de Estatística.

6. Agradecimentos

Agradeço a colaboração de Valentina Lissette Guillen Curbelo, bolsista do projeto *Criação de Atividades de Estatística*. Agradeço, também, ao Programa Unificado de Bolsas da Universidade de São Paulo pelo suporte financeiro à bolsista.

7. Referências

BRASIL- MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Matemática (5ª a 8ª série e Ensino Médio). Brasília. MEC/SEF, 1998.

MAGALHAES, M. N. e LIMA, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, 7ª edição, 3ª reimpressão, São Paulo: EDUSP, 2015.

Apêndice 1- Alguns portais de interesse

a. AtivEstat- Atividades em Estatística

Esse portal está na página internet do IME-USP com acesso direto no endereço: <http://www.ime.usp.br/ativestat/>. O portal apresenta cinco tipos de atividades: Sala de aula, Mini aplicativos, Planilhas, Proposta de projetos e Filmes e vídeos. Destinado a professores que ensinam Estatística em todos os níveis, ele contém, além de sugestões de atividades, indicações de outros portais de interesse. Cada atividade recebeu uma descrição com informações resumidas sobre sua aplicação, incluindo tempo de execução e recursos necessários. Para atividades de outros portais, um link é apresentado, direcionando o professor para a fonte original. Informações adicionais aparecem em Mais detalhes, item presente na descrição de várias atividades. No caso de Filmes, além de instruções para o acesso às legendas, também existem sugestões para discussão com os estudantes.

b. Vamos contar

Desenvolvido pelo IBGE, tem por finalidade fornecer instrumentos (mapas, dados, apostilas, etc.) para auxiliar os professores em aulas de Estatística para a educação básica. Consulte <http://vamoscontar.ibge.gov.br/>.

c. Associação Brasileira de Estatística (ABE)

A Comissão de Divulgação e Educação Estatística da ABE mantém uma página com material para a divulgação da Estatística. O acesso está disponível em: <http://www.estadistica.ccet.ufrn.br/cdee/>.

d. M³ Matemática Multimídia

Esse é o portal do projeto "M³ Matemática Multimídia" desenvolvido pela Unicamp (Universidade Estadual de Campinas). Contém recursos educacionais multimídia para o ensino de Matemática. Acessando pela busca do portal, com as palavras "probabilidade" ou "estatística", surgem diversas atividades no formato de vídeos, áudios, *softwares* e experimentos. O portal se destaca pela quantidade e qualidade do material apresentado. Consulte: <http://m3.ime.unicamp.br/>.

e. Explica

Explica é um portal em espanhol de divulgação da Estatística. É mantido pelo Instituto Nacional de Estadística da Espanha. O portal possui diversos vídeos, artigos, jogos e dados oficiais de alguns centros de pesquisa espanhóis. Além disso, tem livros *online* que trazem uma introdução teórica e contam um pouco da história do desenvolvimento da Estatística. Consulte: <http://www.ine.es/explica/explica.htm>.

f. Alea

Oferece atividades e informações para o ensino de Probabilidade e Estatística. Foi desenvolvido em Portugal, ver www.alea.pt.

g. Cause (em inglês)

Portal da organização que objetiva contribuir para melhorar o ensino de Estatística nos cursos de graduação. Ela é composta por professores dos Estados Unidos e inclui um número grande e diversificado de atividades e informações. Consulte www.causeweb.org.

Apêndice 2 - Cidade Feliz?

