OFICINA 14

DESCOBRINDO E CONSTRUINDO NÚMEROS IRRACIONAIS

Profª Dra. Virgínia Cardia Cardoso[1]

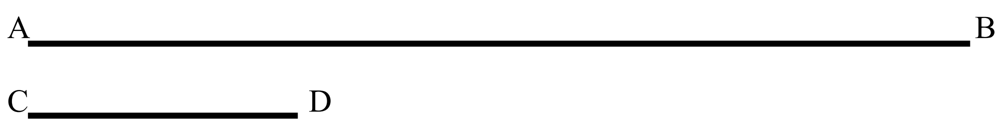
I – PROBLEMAS

1. Uma estrada é muito perigosa, com muitos acidentes. Existem dois trechos retilíneos onde resolveram instalar postos telefônicos de emergência, sob as seguintes condições:
- Nos extremos de cada trecho têm postos telefônicos;
- As distâncias entre dois postos são sempre iguais, em ambos os trechos;
- As distâncias entre dois postos são as maiores possíveis.

Se o primeiro trecho mede 6Km e o segundo mede 1,6Km, qual será a distância entre um posto e outro?

2. Com palitos de churrasco e de pirulito, como podemos comparar os dois comprimentos, sem o auxílio de nenhum tipo de régua?

3. Dados os segmentos AB e CD abaixo, como podemos comparar os dois comprimentos apenas com compasso e régua sem marcas de medida?



II –GRANDEZAS COMENSURÁVEIS E GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS

MEDIR é comparar. Medimos uma grandeza quando a compararmos com outra grandeza do mesmo tipo, considerada como padrão. Por exemplo, quando dizemos que um trecho da estrada mede 6Km estamos comparando o tamanho deste trecho com o comprimento padrão 1Km. Este padrão cabe 6 vezes dentro do comprimento do trecho da estrada.

Para medir nem sempre é necessário usarmos um comprimento já padronizado. Por exemplo, no problema (1) poderíamos dizer que o maior trecho mede 15U e o menor trecho mede 4U. U é uma unidade de medida fictícia. (Neste caso U = _____________).

Podemos escrever esta comparação entre as duas grandezas da seguinte forma: Chamando a primeira grandeza de XY e a segunda de ZW, temos:

$$\frac{XY}{ZW} = \frac{15}{4} \qquad \text{“\textit{XY está para ZW assim como 15 está para 4}”.}$$

A comparação é escrita em termos de RAZÃO entre duas grandezas.

[1] Professora e Coordenadora do programa geral das Licenciaturas da UFABC; Doutora em Educação – Educação Matemática pela FE - UNICAMP.

Os gregos antigos diziam que se duas grandezas poderiam ser comparadas com uma unidade de medida comum, desde que ela coubesse um número inteiro de vezes dentro de ambas as grandezas, estas seriam GRANDEZAS COMENSURÁVEIS. Caso contrário seriam GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS.

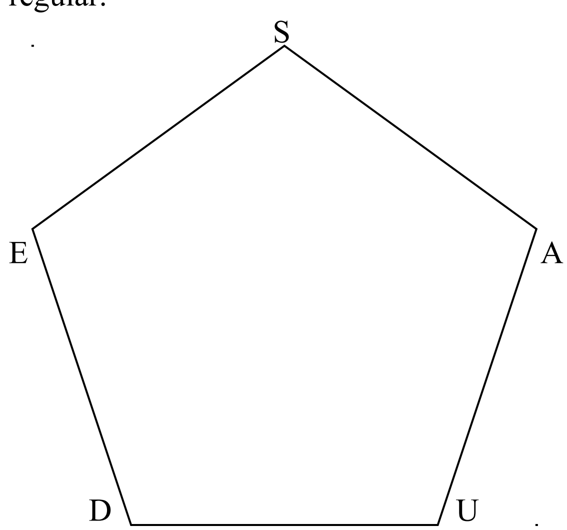
Em termos atuais, podemos dizer que duas grandezas são comensuráveis se existe uma razão com números inteiros que expressa a comparação entre ambas.

NÚMERO RACIONAL
Um número é racional se pode ser escrito como fração entre dois números inteiros, sendo o denominador não nulo.

III – OS PITAGÓRICOS

Na Grécia do século V aC surgiu um grupo de pensadores chamado de Pitagóricos – seguidores de Pitágoras. A este grupo se atribui as primeiras teorias matemáticas – a Aritmética e a Geometria – e vários resultados importantes, como a demonstração do Teorema de Pitágoras. O lema da Escola Pitagórica era "Tudo é Número", ou seja todo fenômeno pode ser estudado com relações entre números. Para os gregos, os números conhecidos eram 1, 2, 3, 4, ... As frações poderiam representar razões entre números naturais não nulos. Para os pitagóricos, as grandezas deveriam ser todas comensuráveis.

O símbolo da escola era o pentagrama pitagórico: as diagonais do pentágono regular.



Problema:

Se a diagonal do pentágono mede *d* e o lado do pentágono mede *l*, qual é a razão $\dfrac{d}{l}$?

A razão acima é chamada de RAZÃO ÁUREA e também aparece no RETÂNGULO ÁUREO e na razão entre dois termos da Seqüência de Fibonacci. Este número é hoje representado por φ – número de Fibonacci. φ = _____________.

Há uma lenda que diz que foi Hipassus de Metaponto – um pitagórico – quem descobriu e divulgou a existência das grandezas incomensuráveis. Como isso contraria a hipótese filosófica da Escola Pitagórica, Hipassus foi punido com a morte, e a teoria pitagórica ficou desacreditada pela falha. Os pitagóricos não conseguiram resolver os problemas da incomensurabilidade.

IV – A TEORIA DAS PROPORÇÕES DE EUDOXO

Eudoxo (filósofo grego do século IV aC) foi um dos seguidores de Platão. Os platônicos resolveram dar ênfase na geometria e evitar o uso de números, uma vez que este conceito já havia se mostrado insuficiente. Eudoxo criou a TEORIA DAS PROPORÇÕES, evitando valores numéricos para as grandezas e, com isso, conseguiu contornar os problemas filosóficos dos incomensuráveis. As idéias de Eudoxo, em termos atuais podem ser escritas como:

"Considere *A, B, C* e *D* quatro grandezas da mesma espécie e *n* e *m* dois números naturais (não nulos). Podemos dizer que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ se, para quaisquer *n* e *m* naturais não nulos, temos:

$$nA > mB \leftrightarrow nC > mD$$
$$nA = mB \leftrightarrow nC = mD$$
$$nA < mB \leftrightarrow nC < mD\text{"}$$

Este raciocínio foi desenvolvido em demonstrações geométricas usando o processo da exaustão. O Método da Exaustão foi usado por Eudoxo, Euclides, Arquimedes, entre outros, para demonstrar vários resultados importantes da geometria.

A idéia da teoria das Proporções foi retomada, mais de dois mil anos depois, por Richard Dedekind (matemático alemão, 1831 a 1916), para formular a idéia de CORTES DE DEDEKIND.

V – NÚMEROS IRRACIONAIS

"Um número é irracional quando não pode ser escrito como fração entre números inteiros."

Problemas:

1. Qual é a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado?
2. Como demonstrar que esta razão não é racional?
3. Como demonstrar que φ não é racional?

VI – CORTES DE DEDEKIND

Considere *A, B, C* e *D* grandezas do mesmo tipo e $\frac{m}{n}$ frações com números inteiros não nulos. Vamos chamar de CLASSE um conjunto numérico definido por uma certa propriedade.

Seja α a classe das frações $\frac{m}{n}$ tais que $nA \leq mB$;

Seja β a classe das frações $\frac{m}{n}$ tais que $nA > mB$;

Seja γ classe das frações $\frac{m}{n}$ tais que $nC \leq mD$;

Seja δ a classe das frações $\frac{m}{n}$ tais que $nC > mD$;

Cada razão $\frac{A}{B}$ é associada a um par de classes (α, β) chamado de CORTE. Se $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, então α = γ, β = δ e temos o mesmo corte para as duas razões.

NÚMERO REAL
Número real é o elemento de separação entre duas classes de um corte qualquer no conjunto de números racionais. Se existir um número racional que separa as duas classes, então o número real coincide com o racional. Caso contrário, o número real é chamado de irracional.

Exemplo:
Seja α a classe de números racionais x tais que $x^2 < 2$ e β a classe de números racionais x tais que $x^2 > 2$. Qual é o elemento de separação entre α e β?

VII – OUTROS NÚMEROS IRRACIONAIS

Atividade: vamos medir, com um barbante o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Qual é a razão entre o perímetro e o diâmetro?

Arquimedes (matemático grego do século III aC) avaliou esta razão como algo próximo a $\frac{22}{7}$. Ele usou o método da Exaustão para mostrar que o perímetro da circunferência era sempre menor que o perímetro de qualquer polígono circunscrito e sempre maior que o perímetro de qualquer polígono inscrito.

Atividade: usando a calculadora, considere o seguinte problema. Na matemática financeira usamos a fórmula $M = C.(1 + i)^t$ para calcular um montante M resultante da aplicação a juros compostos do capital inicial C, a uma taxa percentual i, durante um tempo t. Calcule o montante M, considerando C = 1 e a taxa i = (100% dividida em parcelas mensais). A taxa i será expressa em frações do tipo $i = \frac{1}{n}$, sendo *n* o número de meses da aplicação. Preencha a tabela abaixo:

n	$M = 1.(1 + \frac{1}{n})^n$
1	
2	
3	
10	
50	
100	
1000	
10.000	
1.000.000	
...	

O resultado em questão é conhecido como número de Euler: e = 2, 7182...

Leonhard Euler (matemático suíço, 1707 – 1783) demonstrou que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ e que e é um número irracional.

VIII – BIBLIOGRAFIA

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática.** Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, 1984.

ÁVILA, Geraldo. Eudoxo, Dedekind, Números Reais e o Ensino da Matemática. **RPM** 7, 2º semestre de 1985, pp 5 a 10. SBM.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura.** São Paulo: Edgard Blücher, 2005, 2ª edição.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa, Gradiva, 1998.

COURANT, Richard & ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula** – Geometria. São Paulo: Atual, 1992.

MIGUEL, Antônio. **Três Estudos sobre História e Educação Matemática.** Campinas: Tese de doutorado, FE – UNICAMP, 1993.