OFICINA 12

MODELAGEM MATEMÁTICA NAS RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS FÍSICAS

Prof.ª Vivilí Maria Silva Gomes
(Universidade Federal do ABC)

A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. (Bassanezi, 2006, p.16)

1 Objetivos

- Tratar a metodologia da modelagem matemática como modelação ou estratégia de ensino-aprendizagem.
- Apresentar algumas experiências de modelagem no Ensino Médio da rede pública estadual envolvendo função linear, quadrática, racional, exponencial e logarítmica.
- Discutir as relações entre grandezas físicas obtidas em experimentos simples para vivenciar as diversas etapas da modelação, incluindo o auxílio do computador para o ajuste de curva no gráfico e a proposição de um modelo matemático para o problema, validando e fazendo previsão.

2 O contexto da modelagem matemática em sala de aula

A modelagem matemática vem recebendo atenção como estratégia de ensino-aprendizagem (Bean, 2001; Bassanezi, 2006; Almeida e Dias, 2007; Biembengut e Hein, 2007; Biembengut *et al*, 2013) por ser um recurso compatível com as concepções e propostas educacionais contemporâneas para o ensino, em especial, de Matemática (Fiorentini, 1995; Libâneo *et al*, 2005). Privilegia a participação ativa do aluno na construção de um conhecimento matemático, de forma contextualizada e interdisciplinar, por meio do desenvolvimento de projetos de trabalho que coordenam ações de sala de aula num sentido amplo que extrapola o ambiente escolar (Hernández, 1998). Contribui para uma aprendizagem com significado e com atribuição de sentido pelo aluno, atingindo não apenas a aquisição dos conteúdos conceituais próprios da Matemática e de outras Ciências (Física, Biologia, Química, Economia, Psicologia, por exemplo) envolvidos na resolução do problema tratado bem como dos conteúdos procedimentais e atitudinais que os acompanham no processo de execução do projeto (Zabala, 1998). Também fornece ao aluno a possibilidade de vivenciar já na sua formação escolar as etapas pertinentes a um trabalho de pesquisa científico, pois os projetos de modelagem matemática percorrem etapas muito similares às da metodologia científica, seja numa abordagem qualitativa ou quantitativa, sendo particularmente útil na descrição de fenômenos e proposição de modelos matemáticos para as mais diversas áreas do conhecimento (Bassanezi, 2006). Enfim, possibilita uma vivência integrada de construção de saberes onde as formas de pensar do aluno, seja individualmente ou em grupo, são consideradas. Esses atributos tornam a modelagem matemática um "*que fazer*" (Freire, 1996) em consonância com as peculiaridades do contexto em que os saberes são gerados e apreendidos nos moldes de um programa etnomatemático (D'Ambrósio, 2001), de uma pedagogia matemática crítica (Skovsmose, 2007) e com o professor assumindo uma postura reflexiva. (Schön, 1987; André, 2000).

> Fala-se hoje, com insistência, no professor pesquisador. No meu entender o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou uma forma de ser ou de atuar que se acrescente à de ensinar. Faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente, o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador. (Freire, 1996, p.32)

3 As etapas da modelação

Seguindo as orientações de Bassanezi (2006, p.171-183), um programa de ensino-aprendizagem para a formação de professores que venha a repercutir na sala de aula onde atuam deve incluir fundamentos de Matemática, a modelagem como método científico de conhecimento, a discussão sobre modelos matemáticos clássicos e analogias, a crítica e construção de modelos alternativos, as técnicas do processo de modelagem e a modelagem com modelos elementares.

Assim, o professor Bassanezi (2006, p.183) sumariza o processo em cinco etapas:

- Escolha de temas e objetos de estudo;
- Levantamento de dados;
- Ajustes de curvas;
- Construção de modelos;
- Modelos alternativos: discussões e críticas.

4 Experimentação e Modelação: sugestões de projetos

Os projetos de modelagem dão a oportunidade do contato com temas interdisciplinares, aproximando a Matemática de outras disciplinas, em especial das Ciências Físicas e Biológicas. A Física, por ser uma ciência concebida junto com o método empírico, contribuição de Galileu Galilei (1564-1642) para o método científico, tem sido uma disciplina onde a modelagem de dados fornece uma variedade de exemplos para o trabalho em sala de aula com a obtenção de dados em experiências de fácil realização pelos alunos. As medidas de grandezas físicas interdependentes levam à construção de tabelas e gráficos com ajuste de curva e proposta de um modelo, sua validação e previsão de fenômeno: procedimentos do método empírico e da modelagem em si.

Aqui são apresentados exemplos clássicos que podem ser trabalhados nas aulas de Física e Matemática de forma integrada e que resultam na modelagem de um fenômeno físico (Karam, 2007). O projeto **Relações entre grandezas físicas** trata da modelagem de um fenômeno por meio de uma função linear como na queda de uma gota de água numa coluna de óleo, no alongamento de uma mola ou no escoamento da água numa torneira e de uma função quadrática (parabólica) como no período de oscilação de um pêndulo ou na descida de um carrinho num trilho. Trata também de fenômenos como do resfriamento da água com o tempo ou do equilíbrio térmico na mistura de substâncias com temperaturas diferentes e que envolvem funções com comportamentos exponenciais ou logarítmicos. E do fenômeno do escoamento da água num recipiente com vários furos ou da relação entre velocidades e tempos num dado percurso e que envolvem relações inversamente proporcionais modeladas por uma função racional simples. Outro exemplo é do projeto denominado **João e o pé-de-feijão** que vincula Ciências/Biologia (Botânica) e Matemática e que envolve o acompanhamento do crescimento de uma planta com o tempo, identificando variáveis relevantes no processo e coletando dados para a modelagem. Neste caso um modelo de ajuste envolve uma função exponencial com um comportamento assintótico. Também são sugeridas experimentações geométricas com material concreto com consequente modelação para os dados obtidos de medidas do comprimento da circunferência e de área do círculo em função do seu diâmetro. Com isso determina-se um valor para o número π a partir das medições.

4.1 Relações entre Grandezas Físicas

O projeto intitulado **Relações entre Grandezas Físicas** versou sobre um conjunto de experimentos feitos em grupo de alunos com orientação escrita quanto a material e procedimento e com acompanhamento da professora. Os alunos fazem a montagem, realizam os ensaios, efetuam as medidas, coletando os dados, organizando-os em tabelas e depois em gráficos. Fazem, então, a análise pelo ajuste de uma curva no gráfico e a determinação de alguns parâmetros relevantes e possíveis de se extraírem, considerando o nível de ensino em que estão. Com isso, em algumas situações modelam o fenômeno ajustando uma curva teórica com parâmetros obtidos dos dados experimentais.

Os resultados relativos ao projeto desenvolvido nos 1ºs anos do Ensino Médio-EM da E.E. João Ramalho em São Bernardo do Campo, no ano de 2001, são documentados em relatórios e apresentados para apreciação coletiva em uma exposição. Posteriormente, os dados para o experimento do pêndulo simples foram usados para o ajuste em computador. O ajuste linear e o modelo da equação linear (ver **Figura 1**) propiciam o cálculo da aceleração da gravidade por modelagem matemática.

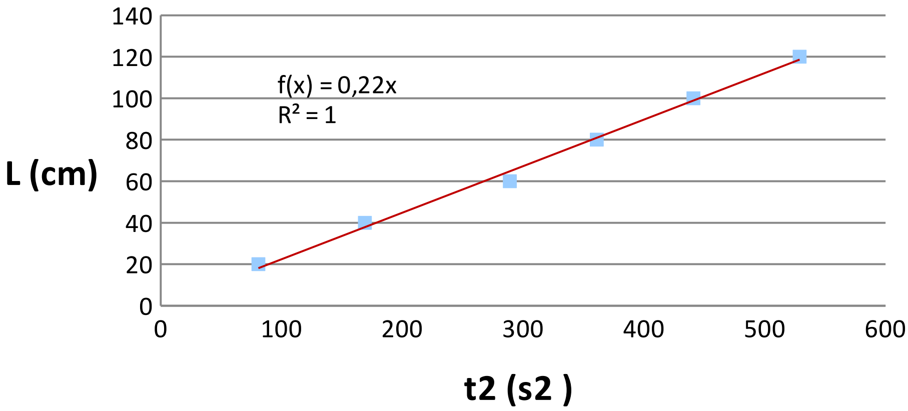

Figura 1 – Ajuste linear para os dados do pêndulo simples.

Determinação da aceleração da gravidade

$$\mathbf{L = 0{,}2242\ t^2}$$

$$\mathbf{L = 0{,}2242 \times 100\ t^2}$$

$$\mathbf{L = 22{,}42\ t^2}$$

$$\mathbf{22{,}42 = L/t^2 = g/(4 \times 3{,}14159^2)}$$

g = 885 cm/s² com erro = 0,096114519= 9,6% para o valor esperado 978 cm/s²

4.2 João e o Pé-de-Feijão

A proposta da modelagem de dados do crescimento do pé de feijão foi feita pelo Prof. Geraldo Pompeu Jr. da UNESP de Guaratinguetá no Curso de Especialização em Modelagem Matemática em Ensino-Aprendizagem coordenado pelo Prof. Rodney Carlos Bassanezi da UFABC no ano de 2009 (Biembengut *et al*, 2013). Sua proposta era de acompanhar o crescimento do pé de feijão registrando diariamente a sua altura. Os dados organizados numa tabela seriam transformados num gráfico. O ajuste e o modelo poderiam ser estudados de acordo com o nível de ensino e habilidade dos alunos. O uso do computador, além de altamente motivador, seria útil para a compreensão rápida dos ajustes e modelos viáveis.

Quando em contato com essa proposta pensei na associação do experimento de Ciências (Botânica) com a história infantil “João e o Pé-de-Feijão”, encontrada em diversas versões na literatura infantil (Rocha, 2004; Bellinghausen, 2006). A história contada para crianças pequenas poderia ser complementada com o experimento de observação da brotagem e crescimento do pé de feijão. Com crianças maiores, mesmo ainda na Educação Infantil, se estimularia a produção de registros dos dados, elaboração de tabelas e gráficos adequados para a faixa etária. No Ensino Fundamental-EF, a abordagem seria já mais elaborada incluindo a resolução de problemas vinculando a história, às observações experimentais, o tratamento da informação e os cálculos. No EF (anos finais) e no EM, o tratamento informatizado relacionado à modelagem matemática por meio de ajustes de curvas e extração de parâmetros do modelo seriam possibilidades mais elaboradas da modelação. Apresento assim, algumas sugestões para esse trabalho atendendo a etapas conforme a faixa etária considerada, descritas a seguir.

1ª etapa – Contação de história

Contar (ou ler) a história de **João e o Pé de Feijão**, o que pode ser complementado ou substituído por um vídeo da mesma história, início de um projeto de trabalho integrado com vários conteúdos abordados de forma diversificada e lúdica.

2ª etapa - O pé de feijão ou feijoeiro: brotamento e crescimento

É feita a experiência de observação e medição da altura do pé de feijão. No caso da Educação Infantil, pode se trabalhar a questão do feijão na alimentação da criança e de sua família. Receitas que envolvam o feijão: cozinha e degustação na escola. Aspectos nutricionais do feijão. Esta etapa pode ser complementada por outros aspectos como os da agricultura, comercialização e consumo do feijão no Brasil para alunos do EF.

Figura 2 – Crescimento do pé de feijão

Com relação à medição, sempre será feita por comparação. No entanto, o que se faz com régua ou papel quadriculado (ou milimetrado) em anos mais avançados, na Educação Infantil e nos anos iniciais do EF as medidas podem ser feitas por marcações em papel colocado num suporte vertical (a parede, por exemplo, como nas fotos da **Figura 2**) ou cortado em tira no tamanho da planta a cada dia a ser colada em cartolina ou numa folha do portfólio da criança. Essa tira de papel pode ser colorida ou com desenhos feitos pela própria criança representando a sua observação naquele dia. A ligação entre pontos no topo de cada coluna guia a visão para acompanhar a evolução do crescimento do pé de feijão. Essa ligação pode ser feita desenhando-se a linha ou com barbante ou cola colorida (ver **Figura 3**).

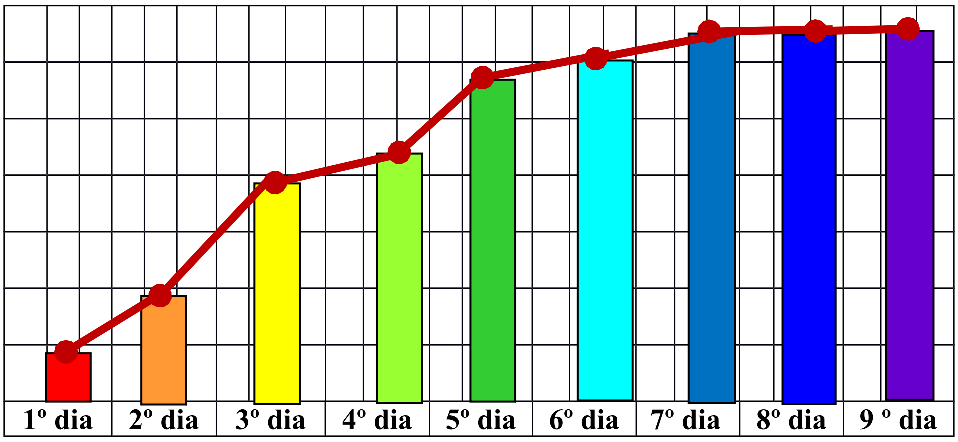

Figura 3 – Gráfico do crescimento do pé de feijão

3ª etapa – Modelagem matemática do fenômeno

Após a coleta dos dados, passa-se a organização dos dados em tabelas e gráficos e sua análise. No computador podem ser construídos usando-se o **diagrama de dispersão** nas suas mais variadas formas. Os pontos no gráfico podem ser ligados simplesmente por linhas retas. Os ajustes-tentativas podem ser feitos pelas **linhas de tendência** como na **Figura 4** onde são mostradas as fórmulas obtidas com ajuste polinomial. Um modelo que descreva o crescimento de qualquer pé de feijão a ser verificado experimentalmente já é uma etapa mais elaborada e objeto de outra oficina. O modelo adequado neste caso seria o **modelo logístico** de crescimento que descreve o crescimento em duas etapas onde há mudança de concavidade da curva. Na 1ª etapa o crescimento é mais rápido e descrito por uma função exponencial. Na 2ª etapa, mais lento, e descrito por uma função exponencial assintótica. (Bassanezi, 2006, p. 333-340)

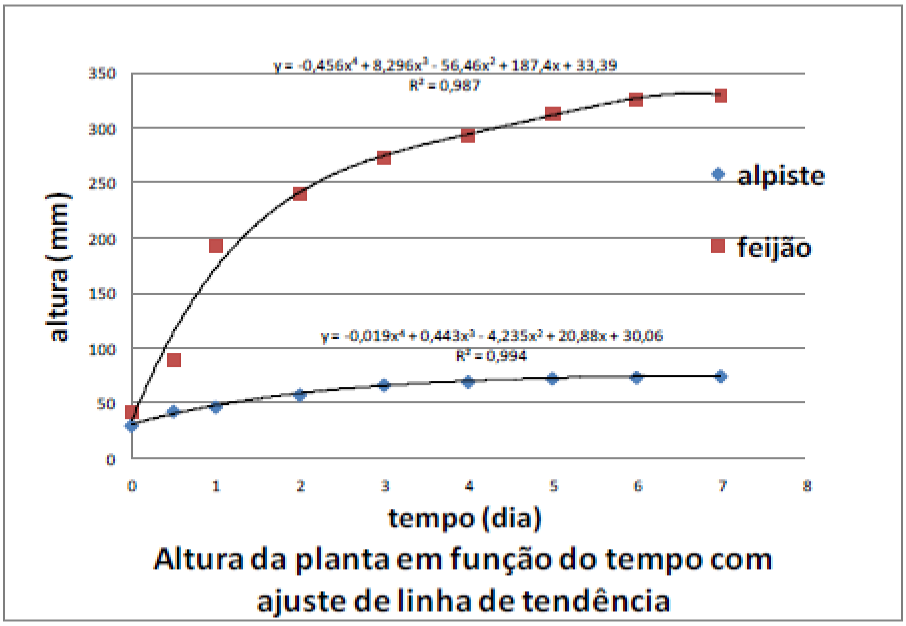

Figura 4 – Gráficos obtidos dos dados para o crescimento das sementes com ajuste polinomial.

4.3 Descobrindo a presença do número π nas coisas

Outro projeto foi desenvolvido em caráter de "revisão" de conceitos básicos de Geometria onde as dificuldades em relação a esses conteúdos eram visíveis e presentes não só nas turmas de EJA como no EM regular dos anos 2010 e 2011. O tema é instigando onde aspectos históricos e curiosidades sobre o número π podem ser levantados (Lima, 2004) bem como literários como no romance de ficção científica "Contato" de autoria do físico e astrônomo Carl Sagan (1986, p.494 e 499-500). Sua abordagem nesta oficina trata da modelagem matemática de medidas de circunferência e área do círculo em função do diâmetro, levando à determinação do parâmetro de relação entre essas grandezas: o número π (Lima, 2004). As curvas a serem ajustadas são modeladas por uma função linear no caso do perímetro (P) e uma função quadrática no caso da área (A) em função do diâmetro (D). A sequência didática envolveu várias etapas descritas a seguir.

1ª etapa – Coleta dos dados

Solicitou-se aos alunos a coleta de objetos cilíndricos em casa. Em algumas salas a professora trouxe alguns objetos e outros da própria sala de aula foram usados. Estabeleceu-se uma discussão sobre o objetivo da atividade, a nomenclatura envolvida, o processo e os instrumentos de medida a serem usados. A medida do diâmetro de cada objeto foi feita com régua e do perímetro com barbante e régua ou fita métrica em alguns exemplos na sala de aula. Aos alunos foi solicitado que escolhessem 3 objetos em casa, fizessem as medidas e apresentassem os resultados em uma tabela e trouxessem para a sala de aula.

2ª etapa – Análise dos Dados

Os dados coletados individualmente foram compartilhados coletivamente, trazidos para a lousa e organizados numa única tabela cujos dados de diâmetro variavam de uns poucos centímetros como no caso de tampas de garrafa ou embalagens de *baton* até 30 ou 40 cm como no caso de baldes ou panelas, por exemplo. Os alunos construíram no caderno uma tabela contendo o nome dos objetos, a medida do diâmetro e do seu perímetro. Após uma discussão não conclusiva sobre a relação possível entre diâmetro e perímetro, observando a tabela e os objetos, os alunos foram orientados a calcularem a razão perímetro (P) e diâmetro (D) – relação P/D, organizando-a numa outra coluna da mesma tabela. A obtenção de valores muito próximos de P/D chama a atenção sobre a sua igualdade envolvendo a discussão sobre os erros na medida e sua propagação no cálculo.

3ª etapa – Determinação do número π

De posse desses dados, a análise foi concluída em sala de aula e também na sala de informática. Os alunos geraram uma tabela com os dados de P, D e a razão P/D em ambiente8 real e virtual. A observação anterior leva a proposição do modelo linear para a relação entre P e D com coeficiente linear nulo, ou seja:

$$\mathbf{P = \pi_{medição} . D}$$

O valor de $\pi_{medição}$ foi obtido de duas maneiras a serem comparados[1], seguindo os procedimentos:

1. Por meio da média dos valores da razão P/D feita com calculadora e com planilha eletrônica.
2. Pelo ajuste de uma função linear cujos coeficientes foram obtidos computacionalmente por regressão linear.
3. Comparação dos valores obtidos nas duas maneiras com o valor de π = 3,14 (até a segunda casa decimal). A estimativa do **erro** cometido é obtida pelo cálculo do desvio da média pela fórmula:

Erro = Mod (valor medido – valor esperado)/valor esperado

1 O aplicativo computacional usado foi o MS-EXCEL disponibilizado pelo ACESSA SÃO PAULO do Governo do Estado de São Paulo às escolas públicas estaduais.

Uma das alunas, ao apresentar sua análise em planilha eletrônica, mesmo com as dificuldades de escrita espontânea comuns a nossos alunos, mas que denota a sua percepção e compreensão do assunto tratado, dá o seguinte parecer,: "*Foram obtidas duas formas de cálculos, a de número PI e no PI médio deu-se o valor 3,37 e no resultado da soma do PI pelo gráfico deu-se 3,34. Mas acredito que o resultado que seria mais correto é do gráfico*." Outra aluna estimou o erro na medição do perímetro de um objeto (um porta-lápis) de diâmetro D = 6 cm . O perímetro foi medido e depois comparado com o valor calculado **P = π.D** usando **π =** 3,14 e avaliando-se o **erro** na medida.

5 Referências

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de e DIAS, Michele Regiane. Modelagem Matemática em cursos de formação de professores. *In*: Jonei C. Barbosa; Jussara de Loyola Araujo; Ademir Donizete Caldeira (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: Biblioteca do Educador Matemático, 2007, v. 3, p. 253-268.

ANDRÉ, Marli Eliza D. A. de. **Etnografia da Prática Escolar**. 5.ed. Campinas: Papirus, 2000.
BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, a. 8, n.9/10, abril 2001, p.49-57.

BELLINGHAUSEN, Ingrid B. **João e o pé de feijão**. São Paulo: DCL, 2006.

BIEMBENGUT, Maria Salett e HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** 5.ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BIEMBENGUT, Maria Salett, VIEIRA, Emília Melo e POMPEU JR., Geraldo (orgs.) **Modelagem (em) comum:** um tributo a Rodney Carlos Bassanezi. Santo André: UFABC, 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Transdisciplinaridade**. 2.ed. São Paulo: Palas Athena, 2001.
DEMO, Pedro**. Pesquisa e construção do conhecimento:** metodologia científica no caminho de Habermas. 5.ed. Rio de |Janeiro: Tempo Brasileiro, 2002.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Zetetiké.** Campinas, a. 3, n. 4, p.1-37, nov 1995.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à prática docente. 15.ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

HERNÁNDEZ, Fernando. **Transgressão e mudança na educação:** os projetos de trabalho**.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

KARAM, Ricardo Avelar Sotomaior. Grandezas físicas para exemplificar a função afim. **Revista do Professor de Matemática**, v. 63. São Paulo: SBM, 2007. p. 29-32.

LIBÂNEO, José Carlos; de OLIVEIRA, João Ferreira e TOSCHI, Mirza Seabra. **Educação Escolar:** políticas, estrutura e organização**.** São Paulo: Cortez, 2005.

LIMA, Elon Lages de. O que é o número π? **Coleção Explorando o Ensino - Matemática**, v. 1. Brasília: SEB-MEC, 2004. p. 126-129. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_icap1.pdf

ROCHA, Ruth. **Joãozinho e o pé de feijão**. São Paulo: FTD, 2004.

SAGAN, Carl. **Contato**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986.

SHÖN, Donald A. ***Educating the reflective practitioner*****.** San Francisco: Jossey-Bass, 1987.

SKOVSMOSE, Ole**. Educação crítica:** incertezas, matemática, responsabilidade**.** São Paulo: Cortez, 2007.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.