

OFICINA 9

TRANSFORMAÇÕES GOMÉTRICAS PLANAS COM O *GEOGEBRA*

Ana Paula Jahn, IME-USP, anajahn@ime.usp.br

Resumo

Esta oficina tem por objetivo caracterizar diferentes transformações geométricas planas por meio de atividades com o *Geogebra*. Pretende-se abordar os diferentes aspectos do conceito de transformação geométrica como aplicação pontual do plano nele mesmo, bem como discutir o potencial das atividades propostas para a sala de aula da Educação Básica.

Palavras-chave: Transformações geométricas. Transformações não isométricas. Simetrias. *Geogebra*.

Introdução

A Geometria apresentada no Ensino Fundamental e Médio é a Geometria Euclideana que tem como ferramentas principais, tanto na resolução de problemas quanto nas demonstrações, a congruência e a semelhança de triângulos.

Nesse contexto, os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) recomendam a inclusão das transformações geométricas no estudo de conceitos geométricos, enfatizando que as atividades envolvendo transformações de uma figura no plano são excelentes pontos de partida para a construção das noções de congruência e semelhança de figuras.

Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias). (BRASIL, 1998, p.86)

De fato, as isometrias, transformações geométricas que preservam distâncias e as homotetias, transformações geométricas que ampliam (ou reduzem) figuras, permitem dar um tratamento mais geral às noções de congruência e semelhança e fornecem um novo método para resolver certas classes de problemas geométricos, embora esse último aspecto não seja mencionado nos PCN.

Nos PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), por sua vez, no campo da Geometria, não há caracterização importante do tema transformações geométricas. Nas OCEM – Orientações Curriculares para o Ensino Médio, como tema complementar, é novamente mencionada a introdução das isometrias e homotetias, desta vez, destacando a *oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos sob os pontos de vista algébrico e geométrico* (BRASIL, 2006, p. 93).

Um estudo de Jahn (2002) destacou que as transformações geométricas, enquanto objetos de ensino, podem ser abordadas de diferentes maneiras, enfatizando-se diversos aspectos. Entre outros, elas podem ser consideradas como:

1. relações entre duas configurações geométricas ou entre duas partes de uma mesma configuração;
2. aplicações pontuais do plano nele mesmo.

No primeiro nível, o conceito de transformação aparece ligado ao contexto das figuras e trata-se então de “*transformação de figuras*”, onde o caráter funcional está ausente. Ações são realizadas sobre os objetos geométricos e a atenção é dirigida às propriedades globais desses objetos e de suas relações internas. É o prescrito nos PCN do Ensino Fundamental, conforme mencionando anteriormente, e o que aparece, em geral, nos livros didáticos.

O segundo pressupõe conceber as figuras e o plano como conjunto de pontos, tendo as transformações um caráter funcional, ou seja, elas representam funções em Geometria. O foco está nas relações entre os objetos, ou seja, nas transformações que permitem associar um objeto a outro. É o que está ausente nos PCNEM .

Assim, restringir o estudo das transformações geométricas às isometrias e homotetias é uma abordagem limitada para uma compreensão mais ampla desse conceito. podendo comprometer a construção do conceito de transformação como aplicação pontual, o que entendemos ser fundamental, não somente pela importância desse conceito na Geometria moderna, mas sobretudo por constituir um campo fértil para articulações de diversos conceitos matemáticos e uma ferramenta útil para demonstrações ou para resolução de problemas e, de um modo geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço.

Com isso, partimos do pressuposto que o ensino da Geometria ganha – com a inserção do estudo das transformações como aplicações pontuais – além do aspecto dinâmico inerente às transformações, uma abordagem mais intuitiva e menos formal que

permite explorar relações entre figuras usando conceitos de continuidade, linearidade, simetria etc.

Desta forma, o principal objetivo desta oficina é apresentar atividades – a serem desenvolvidas com o uso do *Geogebra* – de forma a levar o participante a produzir e analisar transformações geométricas, identificando seus elementos invariantes. Em outras palavras, propor atividades que enfatizam o que podemos chamar de “conceito moderno” de transformação geométrica.

Cabe observar que o estudo proposto nessa oficina faz um forte apelo à visualização, favorecido pelos recursos do ambiente de geometria dinâmica, mas preocupa-se também com as principais justificativas matemáticas.

As transformações geométricas serão apresentadas a partir de conhecimentos prévios da Geometria Euclidiana. Julgamos importante não abandonar a axiomática de Euclides que é inerente à prática dos professores, e sim enriquecê-la com a introdução gradual das transformações.

Antes de passarmos à descrição das atividades a serem desenvolvidas na oficina, apresentamos um breve histórico da evolução da noção de transformação geométrica na Matemática, visando ilustrar que seu significado foi se modificando ao longo dos séculos, e o que coloca essa noção na base estrutural de todas as geometrias.

Um pouco de história...

O objeto transformação geométrica não está presente em Euclides (séc. III a.C.), ainda que possamos atualmente interpretar o princípio da sobreposição – usado, por exemplo, na proposição IV do Livro I de os Elementos em referência ao caso LAL de congruência de triângulos – como sendo a descrição de deslocamentos de figuras no plano. Foi preciso esperar até o século XVI, com Desargues (1591-1661), para ver as premissas do uso de transformações, a partir de técnicas de perspectiva iniciadas no movimento artístico italiano do século XV.

Desargues vê em perspectiva. A elipse, a parábola, a hipérbole são para ele perspectivas de um círculo. [...] Elas não passam de círculos deformados. (THIENARD, 1994, p.16)

Na sequência, as transformações vão se constituir, pouco a pouco, como ferramentas de demonstração, em particular nos trabalhos de Pascal e De La Hire, no sentido de um método permitindo *transferir propriedades de uma configuração a outra*, mais especificamente no contexto das cônicas, ao qual as transformações ficam durante

muito tempo atreladas. A ideia é que as projeções transferem certas propriedades do círculo para as cônicas, suas imagens e, desta forma, as propriedades das cônicas podem ser deduzidas, sem novas demonstrações, daquelas do círculo.

Newton fará um primeiro passo no sentido de descontextualizá-las utilizando um método para *mudar as figuras em outras figuras de mesmo tipo*, mais geral que os métodos precedentes e que se tornou uma ferramenta de resolução de problemas de construção.

A Geometria Analítica (séc. XVII) e o desenvolvimento da Cinemática concorrem para a integração das transformações na Geometria. Somente no final do século XVIII é que as ideias de Desargues e Pascal são retomadas e as transformações geométricas chamam, de fato, a atenção dos matemáticos. Com Poncelet e Chasles, o estudo das projeções se amplia e outras transformações são paralelamente estudadas, buscando definir transformações mais gerais que possuem os invariantes projetivos. Essas transformações aparecem sobretudo como ferramentas de demonstração entre os geométricos, mas os matemáticos que se interessam pela Análise e Álgebra, acabam debruçando-se sobre seus aspectos de invariância. O método das transformações passa a ser, essencialmente, a aplicação, em Geometria, de propriedades de funções. Essa abordagem e as interligações da Geometria com a Teoria dos Grupos foi explorada por Felix Klein, na segunda metade do século XIX. Klein vai descrever a Geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um determinado grupo de transformações. As transformações assumem assim um lugar central em Geometria, uma vez que as propriedades geométricas se classificam e se caracterizam pelas transformações que as deixam invariantes: a cada grupo de transformação corresponde uma determinada Geometria.

Organização da oficina

Esta oficina está organizada em duas partes. Num primeiro momento, o conjunto de atividades enfatiza os aspectos funcionais das transformações de forma a caracterizá-las por meio de suas propriedades invariantes, ou seja, aquelas que se conservam sob o efeito das transformações. Num segundo momento, as atividades serão centradas no estudo das simetrias, como transformações isométricas que deixam figuras invariantes.

De um modo geral, em termos metodológicos, será adotada uma dinâmica que permita, em cada atividade, combinar fases de problematização (questionamentos),

realização (construções e explorações no *Geogebra*), discussão a partir das produções dos participantes e eventual sistematização.

Atividades da Parte I – Explorando transformações não isométricas

Atividade Inicial: *O que é transformação geométrica?*

Iniciaremos com um levantamento dos conhecimentos dos participantes acerca das transformações geométricas, em particular para identificar se os diferentes aspectos descritos anteriormente são explicitados. É importante discutir os conhecimentos prévios, antes de qualquer formalização.

Atividades 1 e 2: *Que transformações são essas?*

Duas transformações serão apresentadas na forma de ferramentas no *Geogebra*. A tarefa consiste em, por meio da exploração dos efeitos dessas transformações em diferentes objetos (pontos, segmentos, retas, triângulos, quadriláteros, circunferências etc.), descrevê-las em termos de suas propriedades invariantes e defini-las geometricamente (por meio da construção que permite obter a imagem de um ponto qualquer pela transformação).

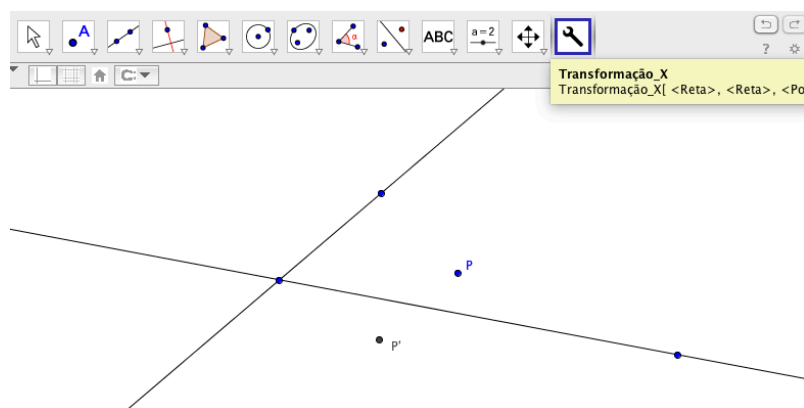


Figura 1 – *Transformação X* a ser estudada na Atividade 1

Atividade 3: *Criação de nova transformação*

Nessa atividade, cada participante deve criar, no *Geogebra*, sua própria ferramenta representando uma transformação geométrica não isométrica. Algumas delas serão exploradas e discutidas coletivamente.

Atividade 4: *Definição de transformação geométrica*

A partir das atividades realizadas, será proposto o seguinte questionamento: *Como podemos definir uma transformação geométrica plana?*

Atividades da Parte II – Explorando simetrias¹

Atividade Inicial: O que é simetria?

Iniciaremos com um levantamento dos conhecimentos dos participantes acerca da noção de simetria. Devido a polissemia do termo, serão discutidas as principais ideias associadas à simetria, buscando relacioná-las com o que aparece no ensino de Matemática.

Atividade 1: Isometrias no Geogebra

Esta atividade propõe a exploração das ferramentas que representam as isometrias no menu de transformações do *Geogebra*. Certamente os participantes já têm conhecimentos sobre as isometrias (reflexão em reta, rotação e translação). Esta atividade visa familiarizá-los com as ferramentas do *Geogebra* (como utilizá-las) e destacar as propriedades das isometrias que preservam alinhamento, distâncias, ângulos etc., enfim produzem figuras congruentes.

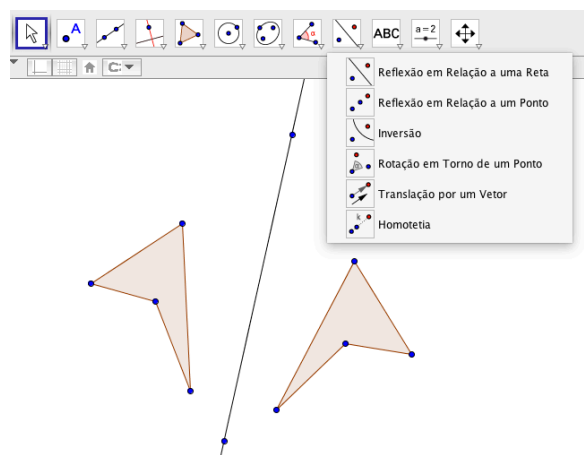


Figura 2 – Menu de transformações geométricas no *Geogebra*

Atividade 2: Conceito de simetria

Será apresentada uma definição de simetria (PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015, p. 35-36) para, em seguida, discutir os principais elementos que a compõem, isto é, isometria e invariância da figura. Serão fornecidas construções interativas no *Geogebra*, contendo diversas transformações e os participantes devem identificar quais delas são simetrias, justificando.

Atividade 3: Descobrimo simetrias de figuras

¹ As atividades *Inicial*, 2 e 3 constituem uma adaptação daquelas propostas na oficina do Prof. Dr. Humberto Bortolossi, da UFF, ministrada no 2º *Simpósio de Formação de Professores de Matemática da ANPMat*, realizado em Brasília, de 8 a 11 de agosto de 2015.

Essa atividade propõe o estudo das simetrias de uma dada figura geométrica plana, iniciando, em particular, com alguns polígonos regulares.

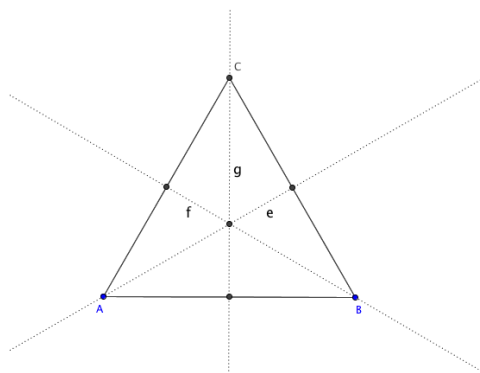


Figura 3 – Simetrias de um triângulo equilátero

Referências bibliográficas

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Matemática. Brasília: MEC-SEF, 1998.

JAHN, A.P. "Locus" and "Trace" in Cabri-géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. **ZDM**, vol. 34(3), 2002.

PASQUINO, R.C.G, BORTOLOSSI, H.J. **Simetria** – História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar. Série: História da Matemática para o Ensino, v. 9. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

THIENARD, J.C. La genèse de la notion de transformation. Les premières transformations. In **Elements pour une étude historique et épistémologique** (article 1). IREM de Poitiers, Université de Poitiers, 1995.