

OFICINA 1

MÁGICAS COM FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Prof. Pedro Malagutti, DM-UFSCar, malagutti@dm.ufscar.br

No Brasil, a universalidade do Ensino Fundamental está sendo atingida somente nos recentes anos e há uma enorme carência de projetos e ações que visem a disseminação das ideias científicas, principalmente na área de Matemática. Nesta oficina, pretendemos colaborar para a divulgação científica em Matemática, apresentando alternativas a professores e licenciandos, a fim de incentivar o interesse dos alunos para a beleza das teorias matemáticas. Mágicas matemáticas serão apresentadas, algumas delas em conexão com questões da OBMEP.

Público alvo: Professores do Ensino Fundamental I, estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática e pós-graduandos em ensino de Matemática.

Sumário:

- Mágicas aritméticas
- Mágicas envolvendo Lógica
- Mágicas e Geometria
- Mágicas e Análise Combinatória
- Mágicas e Códigos Corretores de Erros
- Mágicas e Topologia

- Mágicas aritméticas

Os calendários mágicos e aniversário

Neste primeiro truque, o mágico exhibe sequencialmente cinco calendários mágicos.

Cada calendário apresenta algumas datas destacadas, com números demarcados com um círculo em volta (ou impressos em cor vermelha ou azul se os calendários forem confeccionados em computador). Com esses calendários, diz o mágico, ele pode adivinhar a data de aniversário de qualquer um dos espectadores.

Tendo escolhido um espectador para participar da brincadeira, ao exhibir cada calendário pergunta-lhe se o dia de seu aniversário aparece em destacado ou não.

Os calendários exibidos, com seus dias demarcados, devem obedecer aos seguintes padrões. Os números destacados são indicados em negrito, e sublinhados.

calendário 1

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		<u>1</u>	2	<u>3</u>	4	<u>5</u>
6	<u>7</u>	8	<u>9</u>	10	<u>11</u>	12
<u>13</u>	14	<u>15</u>	16	<u>17</u>	18	<u>19</u>
20	<u>21</u>	22	<u>23</u>	24	<u>25</u>	26
<u>27</u>	28	<u>29</u>	30	<u>31</u>		

calendário 2

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	<u>2</u>	<u>3</u>	4	5
<u>6</u>	<u>7</u>	8	9	<u>10</u>	<u>11</u>	12
13	<u>14</u>	<u>15</u>	16	17	<u>18</u>	<u>19</u>
20	21	<u>22</u>	<u>23</u>	24	25	<u>26</u>
<u>27</u>	28	29	<u>30</u>	<u>31</u>		

calendário 3

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	<u>4</u>	<u>5</u>
<u>6</u>	<u>7</u>	8	9	10	11	<u>12</u>
<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	16	17	18	19
<u>20</u>	<u>21</u>	<u>22</u>	<u>23</u>	24	25	26
27	<u>28</u>	<u>29</u>	<u>30</u>	<u>31</u>		

calendário 4

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>12</u>
<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	16	17	18	19
20	21	22	23	<u>24</u>	<u>25</u>	<u>26</u>
<u>27</u>	<u>28</u>	<u>29</u>	<u>30</u>	<u>31</u>		

calendário 5

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>19</u>
<u>20</u>	<u>21</u>	<u>22</u>	<u>23</u>	<u>24</u>	<u>25</u>	<u>26</u>
<u>27</u>	<u>28</u>	<u>29</u>	<u>30</u>	<u>31</u>		

Após exibir os cinco calendários e ter ouvido as cinco respostas do espectador, o mágico pergunta ao espectador qual é seu signo do zodíaco. Após ouvir a resposta, o mágico lê o horóscopo do espectador (em uma revista ou jornal) e depois anuncia o dia e mês do seu aniversário, acrescentando que seu horóscopo lhe prevê um feliz aniversário nessa data.

Desmascarando o feiticeiro: Suponhamos que a pessoa (espectador) faz aniversário no dia 14 de abril. O mágico observa o primeiro número em vermelho (grifado) em cada calendário em que aparece o número catorze em vermelho (grifado), indicado pelo espectador. No caso de nosso exemplo, os calendários indicados, nos quais 14 aparece grifado, serão os calendários 2, 3 e 4. Os primeiros números grifados nesses calendários são 2, 4 e 8 (confira). O mágico faz mentalmente a soma $2 + 4 + 8$ obtendo 14.

A pessoa dirá que é do signo de Áries. O mágico observa que o signo de Áries é das pessoas nascidas de 21 de março a 20 de abril. Como a pessoa faz aniversário no dia 14, ela só pode ter nascido em abril.

Ao ler o horóscopo, o mágico já terá à mão uma tabela de signos do zodíaco, como a seguinte.

Áries	21/03 a 20/04
Touro	21/04 a 20/05
Gêmeos	21/05 a 20/06
Câncer	21/06 a 21/07
Leão	22/07 a 22/08
Virgem	23/08 a 22/09
Libra	23/09 a 22/10

Escorpião	23/10 a 21/11
Sagitário	22/11 a 21/12
Capricórnio	22/12 a 20/01
Aquário	21/01 a 19/02
Peixes	20/02 a 20/03

Se a pessoa fizer aniversário dia 21, e for de Câncer, ou dia 20, e for de Peixes, o mágico poderá adicionalmente perguntar se a pessoa é do primeiro ou do último decanato de seu signo.

Os primeiros dias grifados, nos cinco calendários, são as cinco primeiras potências de 2, $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ e $2^4 = 16$. Cada inteiro positivo pode ser expressado, de uma única maneira, como uma potência de 2 ou como soma de potências de 2 distintas entre si. O primeiro calendário mostra grifados apenas os números expressados por somas de potências de 2 em que o número 1 participa. O segundo calendário mostra grifados os números expressados por tais somas em que o número 2 participa. Os calendários 3, 4 e 5 mostram, grifados, os números expressados por somas tendo a participação das potências 4, 8 e 16, respectivamente.

Assim, por exemplo, o único número a aparecer nos calendários 1, 4 e 5 será $1 + 8 + 16 = 25$.

O truque da fita métrica



Para fazer este truque precisamos de uma fita métrica (utilizada por costureiras) e 5 clips. Você solicita a uma pessoa que ela escolha um certo número de clips, de 1 até 5 e lhe diga quantos escolheu. A seguir a pessoa coloca os clips escolhidos em lugares da fita, segundo sua própria vontade. Peça então que ela some todos os números marcados em ambas as faces da fita. Antes que ela comece a fazer a soma você já dirá o resultado que será obtido. Após terminar de fazer a conta, a pessoa confirmará que você tinha razão.

Importância matemática do truque: este truque muito simples pode ser descoberto pela pessoa fazendo-se várias tentativas; isto estimulará a habilidade da descoberta e a desenvoltura em realizar operações aritméticas simples, o que é muito desejável no trabalho com alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Deixe-os curiosos e verá que eles mesmos desvendarão o mistério.

Desmascarando o feiticeiro: Basta notar que a soma de dois números marcados de ambos os lados de uma fita métrica é sempre constante, na verdade é 151 na maioria das fitas, mas existem algumas cuja soma é 150 ou 152. Assim, se por exemplo 3 clips foram colocados, a soma dos 6 números marcados será $151 + 151 + 151 = 3 \times 151 = 453$.

As faces ocultas dos dados

Vamos precisar de três dados comuns. Peça a alguém da plateia que embaralhe os dados e os empilhe enquanto você estiver de costas. Vire e diga em alto e bom som que você irá adivinhar a soma dos valores das 5 faces ocultas dos dados. Você poderá imediatamente dizer qual é o valor da soma, apenas observando a face superior do dado mais alto.

Importância matemática do truque: este truque também é muito simples e o espectador poderá, com paciência e organização, descobrir a farsa toda. Basta repetir o experimento diversas vezes. Mais uma vez, acreditamos que com isso seja despertado o interesse pela busca de padrões matemáticos e desenvolvidas algumas importantes habilidades aritméticas elementares.

Desmascarando o feiticeiro: A soma de dois números marcados em lados opostos de um dado comum é sempre 7. Assim, os dois dados inferiores têm lados opostos ocultos que somados resultam 14 e, se você olhar a face superior do dado de cima (digamos que seja 5), saberá quanto é a face oposta a ele (no caso $7 - 5 = 2$). Basta então somar este número a 14 (no caso $14 + 2 = 16$). Você pode também fazer a conta $21 - 5 = 16$. Simples, não?

- Mágicas envolvendo Lógica

Solicite a duas pessoas da plateia que venham à frente para te ajudar em um número de magia. Peça que elas combinem entre si que uma delas sempre falará a verdade e que a outra sempre mentirá, mas que não revele isto a você. Quem mente tem que mentir e quem fala a verdade tem que falar a verdade.

A seguir, pegue seu relógio e entregue a um dos dois ajudantes. Vire de costas e peça que um deles esconda o relógio com as mãos nas costas e que o outro coloque as mãos nas costas, porém sem o relógio, tudo isto sem que você veja.

Diga que fará apenas uma pergunta e adivinhará quem é que está com o relógio, apesar de não saber quem mente, quem diz a verdade e o escondeu.

A pergunta é a seguinte:

“O relógio está com quem está mentindo?”

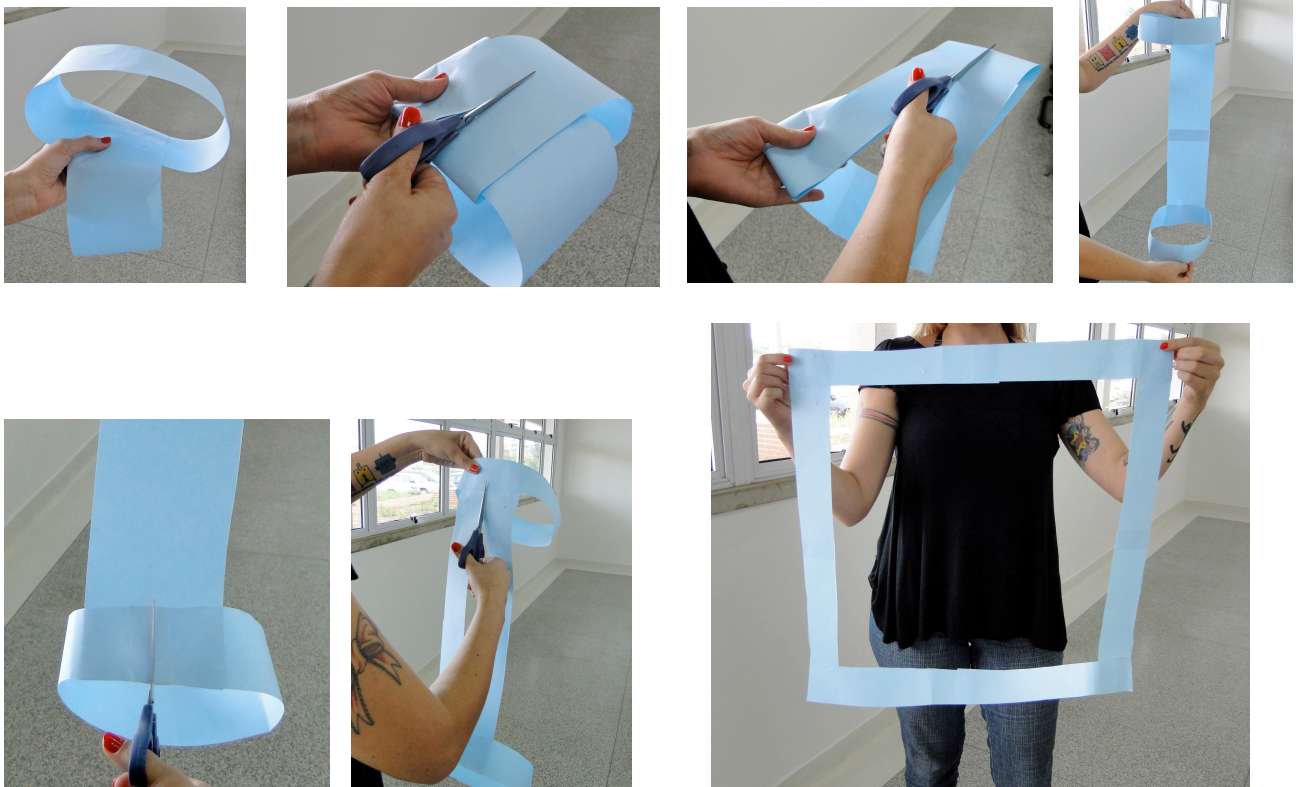
Se a resposta for **não** o relógio estará com a pessoa que respondeu, se for **sim** estará com a outra pessoa. Pura lógica! Veja o motivo a seguir, há só quatro possibilidades:

1. A pergunta foi feita para a pessoa que fala a verdade e o relógio está com ela. Resp.: NÃO
2. A pergunta foi feita para a pessoa que fala a mentira e o relógio está com ela. Resp.: NÃO
3. A pergunta foi feita para a pessoa que fala a verdade e o relógio não está com ela. Resp.: SIM
4. A pergunta foi feita para a pessoa que fala a mentira e o relógio não está com ela. Resp.: SIM

- Mágicas e Geometria

Quadratura dos elos de papel

É possível transformar um elo de papel em uma moldura quadrada. Para isso, entrelace um cilindro de papel em outro, formando um elo, como o de uma corrente. Passe bastante cola em bastão nas emendas dos cilindros para que, quando pressionados, um grude no outro. Siga então as instruções das figuras:

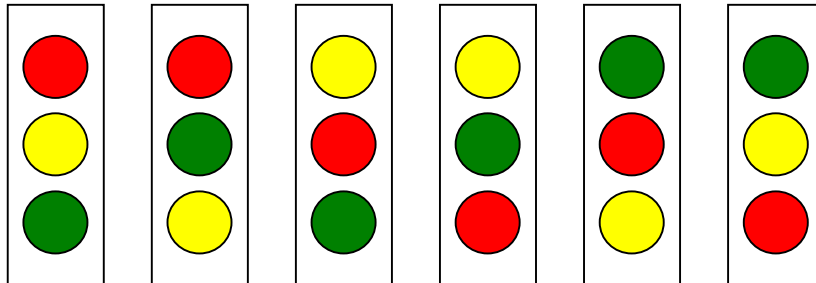


- Mágicas e Análise Combinatória

Semáforos e permutações

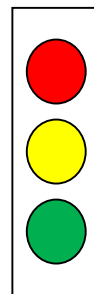
Esta é uma mágica incrível em que você permuta as cores de um semáforo sem que ninguém perceba.

Se você pudesse mudar as cores de lugar, poderia formar 6 semáforos diferentes. Veja:

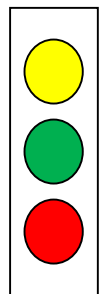


Não precisaríamos listar estas 6 possibilidades para saber a quantidade de permutações de três cores: para a posição do topo, qualquer uma das três cores pode ser usada, temos assim três possibilidades. Uma vez escolhida a cor do topo, passamos à escolha da cor do meio. Como uma cor já foi usada e não vamos repetir cores, temos somente duas possibilidades. Escolhida uma dessas, só nos resta para a posição inferior uma única cor. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos então $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ possibilidades.

Em nossa mágica a disposição de cores:



Será transformada em:

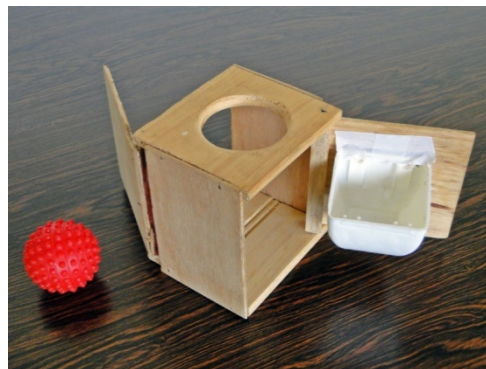


Você deverá preparar de antemão o equipamento para realizar a mágica. Ele é formado por:

- 4 bolinhas coloridas (2 vermelhas, 1 amarela e 1 verde);
- um tubo de plástico transparente (feito, por exemplo, com garrafa pet), de diâmetro suficiente para acondicionar três bolinhas uma em cima da outra;
- um tubo de material opaco (papel cartão ou tubo de plástico) de diâmetro suficiente para encaixar dentro dele o tubo transparente;
- uma caixinha de madeira, contendo em seu interior um copinho de plástico.



Uma das bolinhas vermelhas ficará enroscada aqui. Veja:



Preparação: Coloque uma das bolinhas vermelhas no tubo opaco, deixando-a enroscada na parte superior do tubo. Não deixe que ninguém veja esta bolinha escondida. Veja como a plateia enxergará os materiais (a bolinha vermelha no tubo opaco não fica visível):



Execução:



- Mágicas e Códigos Corretores de Erros

A mágica da mudança na matriz

Esta mágica ilustra uma importante área de pesquisa na interface Matemática/Computação - a Teoria dos Códigos Corretores de Erros. Como o próprio nome diz, ela nos ensina a encontrar e corrigir erros. Para realizá-la, desenhe na lousa um quadriculado 8x8, destacando dentro dele um tabuleiro 5x5, como na Fig. 1.

Fig. 1

		O	X	X	O	X	
		O	O	O	O	O	
		O	X	X	O	O	
		X	O	O	O	X	
		X	O	X	X	X	

Fig. 2

Peça a alguém que preencha o tabuleiro destacado 5x5, com X's e O's, da maneira que ela quiser. Um exemplo está na ilustrado na Fig. 2. A distribuição é aleatória. Diga então que com sua mente treinada você pode memorizar a distribuição dos X's e O's e que qualquer modificação nesta configuração será detectada por sua mente mágica. Mais ainda, para deixar o truque mais difícil, você irá acrescentar mais uma linha e mais uma coluna, de modo a obter uma matriz 6 x 6, como, por exemplo, a da Fig. 3.:

		O	X	X	O	X	X
		O	O	O	O	O	O
		O	X	X	O	O	O
		X	O	O	O	X	O
		X	O	X	X	X	O
		O	O	X	X	X	X

Fig. 3

Após arrumar as 36 marcações como explicado acima, vire de costas e peça à pessoa que troque um X por um O ou um O por um X, na posição que ela livremente escolher. Você irá usar seus poderes mágicos e descobrirá qual foi a troca. Assim que ela realizar esta tarefa, olhe para o tabuleiro e imediatamente aponte para a casa que foi modificada. Você nunca irá errar! Com isto você detecta e corrige pequenas modificações. Muito simples, não? Tente para ver, uma verdadeira magia!

Porque o truque funciona:

Depois que a pessoa completou a matriz 5x5, é sua vez de agir. Ao preencher com um X ou O o sexto elemento de uma linha, faça com que a quantidade total de símbolos X daquela linha fique par. A mesma coisa deve ser feita com as colunas; acrescente um novo X ou O nas sextas casas de cada coluna para que a quantidade total de X em cada coluna fique par.

A seguir peça que a pessoa troque um X por um O ou um O por um X. Depois da troca você descobrirá facilmente qual foi a alteração; basta observar que a linha e a coluna do símbolo modificado têm, ambas, e só elas, um número ímpar de X. No encontro desta linha com esta coluna estará o símbolo alterado. Isto garante 100% de acerto!

Acontece um fenômeno curioso aqui: é sempre possível colocar o último X ou O (na casa marcada na Fig. 4 com uma seta) que faz com que a última linha e a última coluna da matriz aumentada 6x6 tenham, cada uma delas, um número par de X. Isto não é óbvio. Você saberia explicar porque isto ocorre?

	O	X	X	O	X	X	
	O	O	O	O	O	O	
	O	X	X	O	O	O	
	X	O	O	O	X	O	
	X	O	X	X	X	O	
	O	O	X	X	X	X	

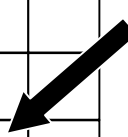


Fig. 4

Aqui vai uma sugestão: troque o símbolo X pelo número inteiro -1 e o símbolo O por 1. Quando você completar uma linha ou coluna transformando a matriz 5x5 em 6x6, deve colocar nela o produto de todos os números daquela linha ou coluna. Isto é o mesmo que deixar um número par de X em cada linha ou coluna, devido às regras de sinais dos números inteiros. Assim, a casa marcada pela seta deverá receber o produto de todos os números colocados

originalmente pela pessoa na matriz 5X5 no início da brincadeira. O elemento da casa marcada deve ser o produto de todos os números da matriz 5x5, obtidos de dois modos diferentes. É a propriedade comutativa da multiplicação!

Várias modificações podem ser feitas; por exemplo, podemos aumentar o tamanho da matriz (aparentemente tornando a adivinhação mais difícil), realizar o jogo em um tabuleiro ou papel quadriculado, trocando os X's por O's por moedas ou por fichas coloridas de preto de um lado e de branco outro, etc. Boa diversão!

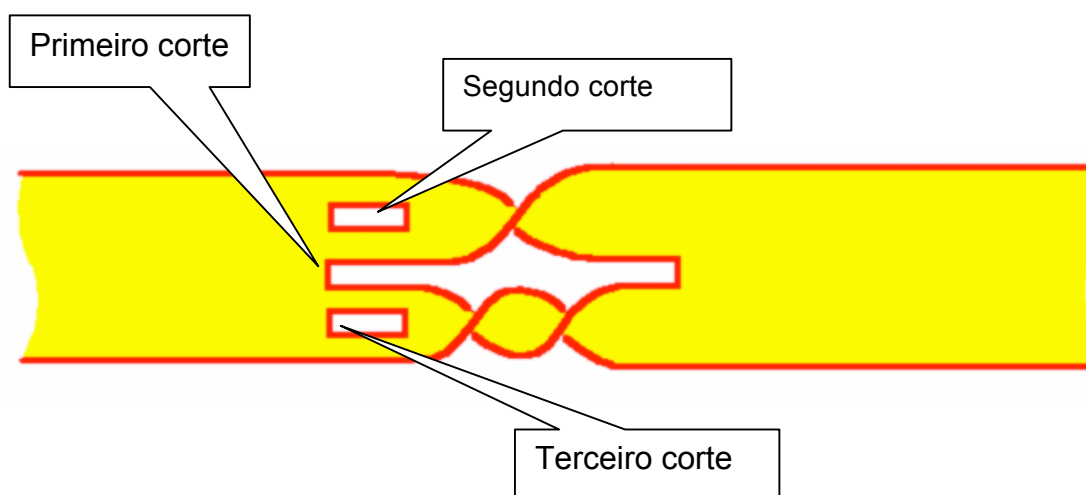
- Mágicas e Topologia

Cintos para artistas de circo

Alguns artistas de circo notaram que não tinham cinto justamente na hora de entrar no picadeiro. O mágico tirou de sua cartola um cinto mágico e dividiu-o em dois. Mas isto não deu certo. Acontece que um dos cintos era para a mulher mais gorda do mundo; o mágico não teve dúvidas: cortou um dos cintos ao meio e o entregou à mulher que agradeceu pois o cinto agora tinha lhe servido perfeitamente. O outro cinto deveria servir nas irmãs siamesas. O mágico novamente não vacilou: cortou o segundo cinto ao meio e ele se adequou perfeitamente às irmãs. Como ele fez isto? Você pode responder com base nos experimentos 1 e 2 descritos acima.

Importância matemática dos experimentos: as atividades acima trabalham os conceitos de orientação e enlaçamentos: permitem fazer conjecturas que são confirmadas ou não com os cortes realizados. Têm interesse grande no estudo de superfícies comumente trabalhadas em topologia e áreas afins.

Desmascarando o feiticeiro: Prepare o cinto mágico antecipadamente de acordo com a figura abaixo e depois faça os cortes conforme a ordem indicada.



- Mágicas e Probabilidade

Formas geométricas: adivinhação com 100% de certeza



Você vai precisar apenas de um lápis (ou caneta) e um bloco de notas de papel. Peça aos espectadores que pensem em figuras geométricas e que, organizadamente, digam o nome da figura pensada.

Digamos que uma primeira pessoa diga “triângulo”. Escreva “triângulo” no papel, dobre-o e coloque-o sobre a mesa. A seguir, uma outra pessoa diz, digamos, “círculo”. Escreva “círculo” no papel e coloque-o dobrado sobre a mesa, ao lado do primeiro.

Uma terceira pessoa diz, digamos, “quadrado”, mas não é isto que você vai escrever no papel; escreva “triângulo”, dobre o papel e coloque-o junto com o primeiro papel, afastando um pouco do segundo. Suponha que uma quarta pessoa diga: “hexágono”, escreva no papel “círculo”, dobre-o e coloque junto ao papel da segunda pessoa. Continue assim, não importa o que você ouvir, escreva alternadamente “triângulo” e “círculo”, colocando os papéis em dois montes diferentes. Em cada uma das pilhas os nomes devem ser idênticos, mas a plateia desconhece este fato.

Depois de várias pessoas dizerem nomes de figuras geométricas, diga que você fará uma previsão de figuras escolhidas. Escreva “triângulo” em uma folha de papel, dobre e entregue-a uma pessoa escolhida por você dentre os presentes.

Faça o mesmo com a palavra “círculo”, entregando-a a outra pessoa também escolhida por você. Pegue então a primeira das pilhas que está sobre a mesa, e solicite que a primeira pessoa escolha um dos papéis. Guarde os papéis restantes desta pilha em seu bolso. Diga que seus poderes mágicos estão aguçados e peça também que a segunda pessoa escolhida por você selecione um dos papéis da outra pilha. Coloque os papéis restantes em seu bolso. Pronto!

Os nomes nos papéis da primeira pessoa coincidirão, bem como os nomes em poder da segunda pessoa! 100% de acerto.

Fontes

Malagutti e Sampaio. *Mágicas, Matemática e outros mistérios*. EDFSCar, 2012.

Malagutti e Sampaio. *Mágicas com papel, Geometria e outros mistérios*, EDFSCar, 2014.