

GEOMETRIA É MAIS QUE PROVA

Por Alan Hoffer, Universidade de Oregon
Eugene, OR 97403

Artigo traduzido da revista Mathematics Teacher, Janeiro de 1981, por Antonio Carlos Brolezzi.

Todo ano pedimos a muitos de nossos alunos do primeiro ano na Universidade de Oregon para relacionarem os assuntos ou tópicos matemáticos de que mais gostaram e os tópicos de que gostaram menos nas suas aulas antes da faculdade. Embora diversos assuntos fossem "favoritos", o assunto quase universalmente destestado foi a Geometria do segundo grau.

Ora, eles são pessoas inteligentes que se saíram bem nos seus cursos de Álgebra, e alguns prosseguiram estudando tópicos avançados. Por que não gostam de Geometria? As respostas mais comuns eram: "Tive que provar teoremas o ano inteiro", "Não entendi do que se tratava", "Passei pelo curso memorizando provas". Até se disse, "Nós fizemos mais teoremas que Geometria".

Às vezes é difícil para o professor deixar de dar ênfase à provas, mesmo quando os alunos estão sentindo dificuldades. No entanto, há outras habilidades de natureza geométrica que podem ser de igual importância para os alunos. Algumas delas serão discutidas na seção, "Habilidades em Geometria". A seção "Níveis de desenvolvimento mental em Geometria" descreve uma sequência de níveis de pensamento dos alunos, a qual é padronizada segundo o trabalho de professores da Holanda. A seção final, "Amostras de habilidades e problemas", mostra um quadro, com exemplos, de como podemos ser capazes de conectar as habilidades com os níveis de desenvolvimento.

Habilidades em Geometria.

Aqui estão cinco áreas de habilidades básicas para as quais podemos desejar dedicar mais tempo nos nossos cursos de Geometria no segundo grau. Algumas dessas habilidades podem, ou não, ser estudadas por alunos de sétima a oitava séries, e começo do segundo grau. Em ambos os casos, parece apropriado propiciar aos alunos experiências nestas habilidades no nível do segundo grau.

Habilidades visuais

Geometria é claramente uma matéria visual, mas com demasiada frequência seus aspectos visuais têm servido primariamente como uma ferramenta para provas. Tem havido, recentemente, pesquisas tratando dos diferentes papéis que os dois hemisférios do cérebro representam no aprendizado de Matemática (Ornstein 1975; Wheatley 1977). Aparentemente, o hemisfério esquerdo tem mais a ver com funções lógicas e analíticas, enquanto o hemisfério direito lida mais com funções sintetizadoras e espaciais. Assim, como em todo bom curso de Geometria, é importante propiciar aos alunos experiências adequadas para desenvolver ambos os lados do cérebro.

Há estudos que mostram uma conexão entre a baixa percepção espacial e a chamada "ansiedade Matemática" (Dougherty 1975; Tobias 1978). Parece que aqueles alunos aflitos quando estudam Matemática também não se saem bem em tarefas espaciais.

Pode ser que os alunos precisem explorar mais figuras e esquemas manipuláveis. Por exemplo, peça para seus alunos procurarem secções transversais num sólido, tal como um tetraedro (fig. 1). Podem encontrar uma secção transversal com o formato de um retângulo?

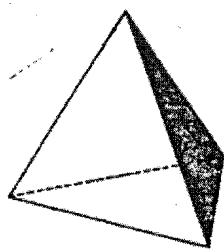


Figura 1

Um problema como esse encoraja os alunos a reverem a palavra retângulo, a pensarem sobre propriedades de retângulos e verem como os retângulos se relacionam com outras figuras.

Habilidades verbais

Um curso de Geometria provavelmente salienta o uso de linguagem mais do que qualquer outro curso matemático. Há abundância de vocabulário para os alunos aprenderem. Há definições precisas. Há postulados e proposições que descrevem propriedades de figuras e relações entre figuras. Pede-se aos alunos que leiam muito material e que escrevam suas próprias demonstrações.

Alguns alunos têm dificuldade considerável quando estão fazendo a descrição de um conceito ("Eu o entendo, mas não posso dizê-lo"). Os alunos frequentemente expressam idéias de maneiras imprecisas que destoam das dos professores e textos. Um aluno poderia dizer, "Um círculo é

uma linha redonda", ou "Um bissetor perpendicular atravessa o meio e fica em pé".

Formulações precisas podem ser forçadas nos alunos antes que estejam prontos - antes que tenham eles mesmos a oportunidade de descrever conceitos e reconhecer a falta de precisão nas suas afirmações.

Habilidades de desenho.

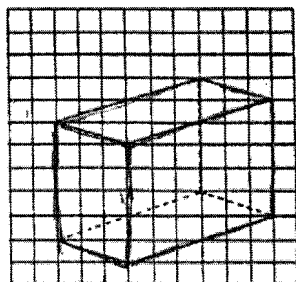
Os cursos de Geometria fornecem oportunidades para os alunos expressarem suas idéias em desenhos e diagramas. Na vida posterior, alguns alunos podem ter mais necessidade de fazer um desenho de uma situação geométrica do que um provar teorema.

As habilidades de desenhar podem, e provavelmente devem, ser desenvolvidas em cursos de Geometria, e as atividades ajudam com frequência a preparar alunos para aprender mais tarde, relações geométricas.

Há ocasiões em que podemos ter mais necessidade de fazer um desenho de uma situação geométrica do que provar um teorema.

Por exemplo, usar uma régua e transferidor para fazer desenhos ajuda a preparar os alunos para os postulados de régua e ângulo. Fazer construções com compasso e esquadro no começo do curso ajuda os alunos a entenderem propriedades das figuras. Usar reticulados ou papel quadriculado ajuda os estudantes a desenharem figuras satisfatórias em duas e três dimensões. Os reticulados podem ser usados para preparar para conceitos de área e volume, bem como para semelhança. Por exemplo, peça aos seus alunos para fazerem desenhos de figuras cujos lados são proporcionais a uma dada

figura, tal como uma caixa cujos lados sejam duas vezes maiores que os da caixa mostrada na figura 2.



Essa atividade encoraja os alunos a analisarem figuras, a usar razão e proporção, e a considerarem figuras semelhantes.

Habilidades lógicas.

A Geometria é uma das matérias do currículo que mais ajudam os alunos aprenderem a analisar a forma de um argumento e a reconhecerem a forma de argumentos válidos e não-válidos no contexto de figuras geométricas e, posteriormente, em problemas da vida diária.

Infelizmente, alguns cursos de Geometria podem encorajar memorização sem entendimento. Alguns alunos que já estudaram Geometria dizem que eles "se viravam" através da memorização de provas de teoremas. Quando isto acontece nós derrotamos a justificativa popular para estudar este tema qual seja "desenvolver habilidades de raciocinar". Esta deficiência pode, é claro, ser culpa mais do professor que dos cursos preparados. No entanto, o resultado é o mesmo.

Para os alunos desenvolverem habilidades lógicas, muitos necessitam trabalhar informalmente com idéias ilustrativas e verbais antes de serem introduzidos às regras da lógica. Eles devem estar conscientes das ambiguidades da

6

linguagem, dos usos de quantificadores, e assim por diante. Essas atividades podem ser tão divertidas quanto instrutivas. Por exemplo, considere a ambígua frase da placa de uma mercearia: "Por que pagar preços mais altos em outro lugar? Compre aqui".

A habilidade de desenvolver um argumento lógico num contexto geométrico pode focalizar-se num diagrama com certas informações dadas, os alunos são convidados a chegar à conclusão baseados nas informações dadas. Os alunos parecem necessitar de experiências com esses tipos de atividades numa base informal, por exemplo, pergunte a eles se há informação suficiente dada no trapezóide mostrado na figura 3 para achar a área de THOR. Os alunos são encorajados a estudar a informação dada, deduzir informações adicionais sobre a figura, e resolver o problema. Atividades desse tipo podem ajudar os alunos a desenvolverem suas habilidades lógicas informalmente antes de aprenderem a escrever uma prova formal.

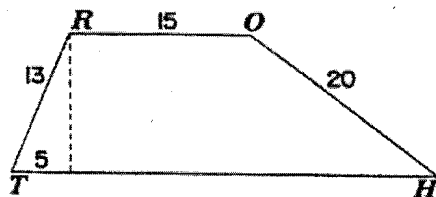


Figura 3

Habilidades Aplicadas

Geometria significa mais do que apenas "medição da terra". Os gregos usavam a palavra mathema para indicar "aquilo que é aprendido". Eu imagino que os gregos viam a Matemática como um estudo aprofundado de fenômenos físicos. Essa visão é bem ilustrada na escola Pitagórica, que a utilizava para explicar música, arte e ciência. Por exemplo,

uma secção transversal de uma célula de colméia tem a forma de um hexágono regular. Um estudo da estrutura de uma colméia leva naturalmente a questões sérias sobre hexágonos. Descrever movimentos dos planetas leva a questões sobre círculos, elipses, esferas, e assim por diante. Poderíamos ver a Matemática como o estudo de estrutura - frequentemente sugerido pelos fenômenos físicos.

Alguns alunos dizem que eles "se viraram" em Geometria através da memorização de provas.

Atualmente a idéia de descrever fenômenos matematicamente é chamado de Modelagem Matemática. Pela análise de um modelo podemos, frequentemente, prover informações sobre os fenômenos originais. Um dos melhores exemplos antigos de um modelo matemático é encontrado nos elementos de Euclides, que pode ter sido o resultado de uma tentativa de descrever logicamente o universo como era conhecido para os gregos. Modelos matemáticos são usados hoje em vários campos como: agricultura, biologia, administração, geografia, e psicologia.

Dedicando mais tempo ao desenvolvimento de habilidades de modelagem nós seremos capazes de prover os alunos com mais aplicações práticas de Geometria que ocorrem, por exemplo, em arquitetura, astronomia, e engenharia bem como aplicações do raciocínio que são usadas por advogados, pessoas de negócios, e consumidores.

NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO MENTAL EM GEOMETRIA:

Em 1959 P.H. van Hiele, um professor da Holanda, relatou estudos que ele e sua esposa conduziram sobre o desenvolvimento mental em Geometria (van Hiele 1959; van

Hiele 1973; Wirszup 1976). Eles identificaram cinco níveis, que tomei a liberdade de descrever.

Visualização ou

Nível 1: Reconhecimento. O aluno aprende algum vocabulário e reconhece uma forma como um todo. Por exemplo, neste nível um aluno reconhecerá um desenho de um retângulo, mas provavelmente não terá consciência das suas muitas propriedades.

Nível 2: Análise. O aluno analisa propriedades de figuras. Nesse nível, um aluno pode perceber que os lados opostos e, possivelmente até as diagonais de um retângulo, são congruentes mas não notará como os retângulos relacionam-se com os quadrados ou os triângulos retângulos.

Dedução informal ou

Nível 3: Ordenação. O aluno ordena logicamente figuras e entende interrelações entre elas e a importância de definições acuradas. Nesse nível um aluno entenderá porque todo quadrado é um retângulo, mas pode não ser capaz de explicar, por exemplo, por que as diagonais de um retângulo são congruentes.

Nível 4: Dedução. O aluno entende o significado de dedução e o papel de postulados, teoremas e provas. Nesse nível um aluno será capaz de usar o postulado LAL para provar afirmações sobre retângulos mas não entenderá porque é necessário postular a condição LAL. (Byrkit 1971; Krause 1975) e como o postulado LAL conecta as medidas de distância e de ângulos.

Nível 5: Rigor. O aluno entenderá a importância de precisão ao lidar com fundamentos e interrelações entre estruturas. Esse nível mais avançado é raramente alcançado por alunos de nível secundário. Nesse nível um aluno entende, por exemplo, como o postulado das paralelas (euclidiano) relaciona-se à

existência de retângulos e que na Geometria não-euclidiana os retângulos não existem.

Dedicar tempo demais a provas formais tira um tempo precioso do desenvolvimento de outras habilidades geométricas.

A pesquisa de P.H. van Hiele indica que para alguns alunos atuarem mais adequadamente num dos níveis avançados, devem dominar boas porções dos níveis anteriores. Os alunos que têm dificuldade na Geometria do secundário (nível 4) podem entrar no curso sem ter saído do nível 1. As suas experiências da 7ª série ao 1º ano do segundo grau podem ser base insuficiente para habilitá-los a trabalhar no nível 4.

AMOSTRAS DE HABILIDADES E PROBLEMAS

As tabelas que seguem dão exemplos de várias habilidades que poderiam ser esperadas dos alunos em diferentes níveis de seu desenvolvimento em Geometria.

A tabela 1 apresenta amostras de descrições de habilidades para cada área mencionada na primeira seção, "Habilidades em Geometria", em termos dos níveis que são relacionados na seção "Níveis de desenvolvimento mental". Não são as únicas habilidades, é claro, apenas uma amostra. Além disso, alguma interpretação é necessária. Por exemplo, a palavra "figura" deve ser interpretada como idéia geométrica, ou um desenho de um espécime geométrico, ou até mesmo um símbolo.

Na tabela 2, escolhi arbitrariamente o tópico de retângulos para ser uma base para problemas que os alunos podem ser capazes de resolver em cada uma das várias áreas de habilidades e níveis mentais.

Não pretendo que elas sejam as melhores questões possíveis, apenas exemplos. Além disso, algumas questões certamente servem para mais de uma área de habilidades.

RESUMO

É minha opinião, baseada em numerosas observações de sala de aula, discussões com outros professores e com alunos, e (infelizmente) minhas próprias experiências, que muitos cursos de Geometria para o secundário dão uma ênfase grande demais no desenvolvimento pelos alunos, da habilidade de escrever provas formais. Quando isto acontece, retira-se da classe um tempo preciosos que poderia ser usado para fornecer aos alunos experiências em outras habilidades, possivelmente mais práticas, de natureza geométrica. Além disso por começar com provas formais cedo demais num curso de Geometria, podemos não levar em conta aqueles alunos que ainda não alcançaram um nível suficientemente alto de desenvolvimento mental que os capacite a trabalhar adequadamente no nível formal.

Estou ministrando um curso de Geometria para o 2º grau agora, onde dedicamos o primeiro semestre inteiro a explorar conceitos geométricos informalmente, sem a necessidade de provas. Isto capacita os alunos a estudar em o que eles chamam "coisas divertidas" enquanto se preparam para aspectos mais formais (nível 4) na segunda metade do curso. É interessante que durante a parte informal do curso, um aluno tentará explicar porque ele ou ela acha que uma afirmação é verdadeira. O aluno realmente está raciocinando como para uma prova sem ser confinado a escrever as sentenças e razões num formato de duas colunas.

Deixe o primeiro semestre de um curso de Geometria ser um desenvolvimento informal de vocabulário e conceitos. Guarde a dedução para o segundo semestre.

Isso é, obviamente, uma prática que é empregada por muitos professores através de todo um curso de Geometria. Estou simplesmente sugerindo que os alunos precisam ter essas experiências informais antes da introdução da prova formal.

A medida que nos tornamos mais conscientes de como os alunos aprendem Geometria, podemos fornecer-lhes experiências de aprendizado mais efetivas.

Possivelmente a tarefa mais difícil que temos é ultrapassar nosso próprio sistema mental de como era a Geometria quando a estudamos no 2º grau. Certamente, Geometria é mais que prova, C.q.D.

TABELA I
HABILIDADES BÁSICAS EM GEOMETRIA

NÍVEL HABILIDADE	I RECONHECIMENTO	II ANÁLISE	III ORDENAÇÃO	IV DEDUÇÃO	V RIGOR
VISUAL	Reconhece figuras diferentes de um desenho. Reconhece informações rotulada numa figura.	Percebe as propriedades de uma figura como parte de uma figura maior.	Reconhece inter-relações diferentes tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usa informação sobre uma figura para deduzir outras informações.	Reconhece suposições injustificadas feitas através do uso de figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos.
VERBAL	Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentenças que descrevem figuras.	Descreve acuradamente várias propriedades de uma figura.	Define palavras precisa e concisamente. Formula sentenças mostrando interrelações entre figuras.	Entende a relação entre definições, postulados e teoremas. Reconhece o que é dado num problema e o que se pede para achar ou fazer.	Formula extensões de resultados conhecidos. Descreve vários sistemas dedutivos.
DESENHO	Faz esquemas de figuras identificando acuradamente as partes dadas.	Traduz numa figura a informação verbal dada. Usa as propriedades de figuras para desenhar ou construir as figuras.	Dadas certas figuras é capaz de construir outras figuras relacionadas às figuras dadas.	Reconhece quando e como usar elementos auxiliares numa figura. Deduz a partir de informação dada como desenhar ou construir uma figura específica.	Entende as limitações e capacidades de vários instrumentos de desenho. Representa pictorialmente conceitos atípicos em vários sistemas dedutivos.

TABELA I
HABILIDADES BÁSICAS EM GEOMETRIA

NÍVEL HABILIDADE	I RECONHECIMENTO	II ANÁLISE	III ORDENAÇÃO	IV DEDUÇÃO	V RIGOR
LÓGICA	Percebe que há diferenças e semelhanças entre figuras. Entende a conservação da forma de figuras em posições diferentes.	Entende que figuras podem ser classificadas em tipos diferentes. Percebe que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras.	Entende qualidades de uma boa definição. Usa propriedades de figuras para determinar se uma classe de figuras está contida numa outra classe.	Usa regras de lógica para desenvolver provas. É capaz de deduzir consequências a partir de informação dada.	Entende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados. Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.
APLICAÇÕES	Identifica formas geométricas em objetos físicos.	Reconhece propriedades geométricas de objetos físicos. Representa fenômenos físicos em papel ou num modelo.	Entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	É capaz de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. É capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolve modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e da natureza.

TABELA II
EXEMPLOS DE PROBLEMAS PARA AS ÁREAS DE HABILIDADES

NÍVEL HABILIDADE	I RECONHECIMENTO	II ANÁLISE	III ORDENAÇÃO	IV DEDUÇÃO	V RIGOR
VISUAL	Qual das figuras abaixo é um retângulo? 1.  2.  3.  4. 	Quantas retas de simetria diferentes tem um retângulo?	Você pode encontrar a secção transversal de um tetraedro que tem a forma de um retângulo?	Um pedaço retangular de papel pode ser enrolado para formar a superficie lateral de um cilindro circular. Que forma de papel é necessária para fazer um cilindro circular oblíquo?	Existe um retângulo em geometria de chofer de taxi cujas diagonais não são congruentes?
VERBAL	Para o retângulo ABCD, 1- Como se chamam os segmentos AC e BD? 2- Que ângulo é oposto a ABC? 3- Que lados são adjacentes a BC?	Enumere tantas propriedades de um retângulo quantas você puder.	Escreva uma definição breve e cuidadosa da palavra retângulo.	Qual destas afirmações é uma definição? Qual é um postulado? E qual é um teorema? 1- Um retângulo é um paralelepípedo com um ângulo reto. 2- A área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. 3- Um retângulo com diagonais perpendiculares é um quadrado.	Explique porque retângulos não existem na geometria não-euclidiana.

TABELA II
EXEMPLOS DE PROBLEMAS PARA AS ÁREAS DE HABILIDADES

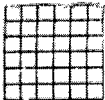
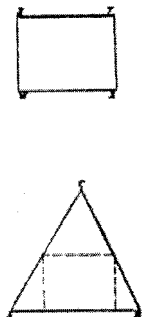
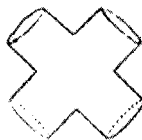
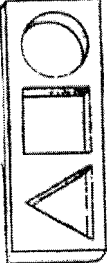
NÍVEL HABILIDADE	I RECONHECIMENTO	II ANÁLISE	III ORDENAÇÃO	IV DEDUÇÃO	V RIGOR
DESENHO	Utilize reticulados como o mostrado, para desenhar um retângulo WXYZ com comprimentos de lado de 4 e 7 unidades 	Construa um retângulo dado o comprimento de um lado e de uma diagonal.	Dados o triângulo ABC e o retângulo WXYZ. Usando o compasso e régua, inscreva um retângulo em ABC que seja semelhante a WXYZ. 	Dois cilindros têm o mesmo tamanho e formato. Faça um desenho da região que estes cilindros tem em comum. 	Dado um círculo é possível usando somente, compasso e régua, construir um retângulo igual em área ao círculo?
LÓGICA	Se um retângulo é inclinado como se mostra na figura, a nova figura é também um retângulo? 	A área de um retângulo é determinada por seu perímetro? Se dois retângulos têm perímetros iguais, suas áreas também são iguais?	Verdadeiro ou falso? 1- Todo retângulo é um quadrado 2- Todo quadrado é um retângulo. 3- Se as diagonais de um paralelogramo são congruentes, a figura é um retângulo.	Prove ou negue: Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes, a figura é um retângulo	Uma vez que retângulos não existem em geometrias não euclidianas, como são determinadas as áreas das figuras?

TABELA II
EXEMPLOS DE PROBLEMAS PARA AS ÁREAS DE
HABILIDADES

NÍVEL	I RECONHECIMENTO	II ANÁLISE	III ORDENAÇÃO	IV DEDUÇÃO	V RIGOR
HABILIDADE	Descreva formas retangulares que você vê nesta classe e na pista de atletismo.	Se um campo retangular tem 100 metros de comprimento, qual é o menor tamanho de papel que você precisa para desenhá-lo em um mapa do campo em escala 1:1000?	Qual é a área do maior retângulo que pode ser inscrito num triângulo dado?	Projete um sólido que possa passar através de três aberturas sem que sobre nenhum espaço. 	Qual é a forma verdadeira na Terra de uma região retangular num mapa da Terra?