Geometria Analítica

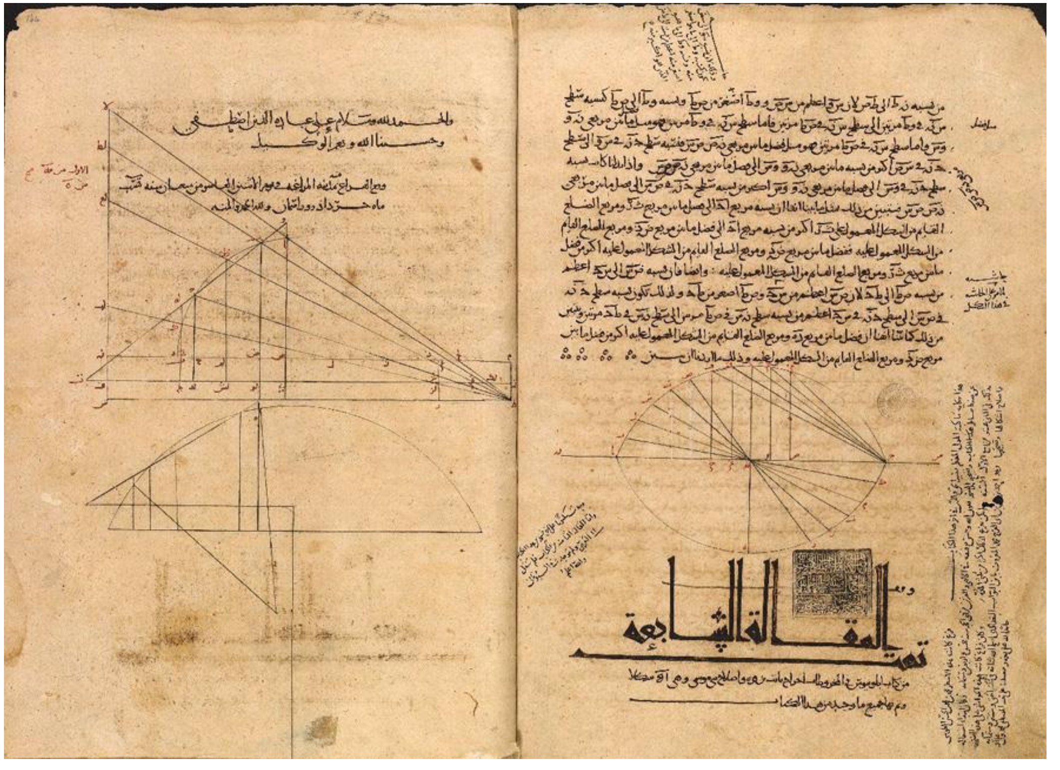
MAT 341 – Brolezzi

A Geometria surgiu por necessidades praticas e estéticas, ajudando a descrever formas da natureza e criadas pelo homem.

Na Grecia antiga, o ambiente de debates e as trocas comerciais com outros povos ajudaram a desenvolver as habilidades de argumentação e demonstração, e a Geometria foi uma das primeiras áreas do conhecimento a ser organizada de forma logica.

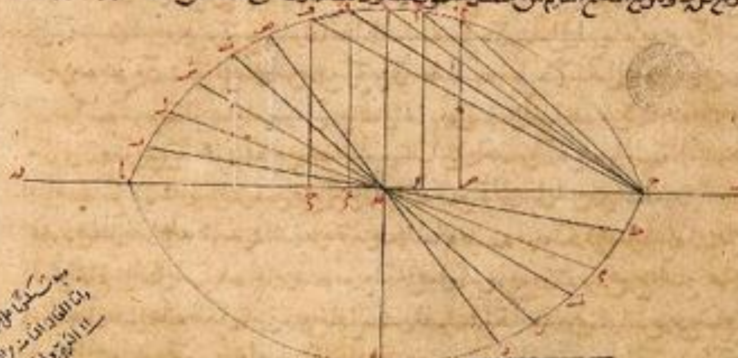
Grécia antiga: ambiente de debates e as trocas comerciais com outros povos ajudaram a desenvolver as habilidades de argumentação e demonstração.

Geometria: foi uma das primeiras áreas do conhecimento a ser organizada de forma logica.



Cônicas, de Apolônio (15-100)

من نسبة ن ط الى ط ض لان ص ق اعظم من ص ض و ط آ اصغر من ح ط ونسبة ط آ الى ح ط كنسبة سطح
ص ن في ط آ مرتين الى سطح ص ن في ح ط مرتين فاما سطح ص ن في ط آ مرتين فهو مثل ما بين مربعي ن ه و
ه ص واما سطح ص ن في ح ط مرتين فهو مثل فضل ما بين مربعي ن ض و ض ص فنسبة سطح ح ن في ص ق الى سطح
ح ن في ص ض اكبر من نسبة ما بين مربعي ن ه و ه ص الى فضل ما بين مربعي ن ض و ض ص واذا بدلنا كانت نسبة
سطح ح ن في ص ق الى فضل ما بين مربعي ن ه و ه ص اكبر من نسبة سطح ح ن في ص ض الى فضل ما بين مربعي
ن ض و ض ص فيتبين من ذلك مثل ما بينا انفا ان نسبة مربع ا ح الى فضل ما بين مربع ث ك ومربع الضلع
القائم من الشكل المعمول على ث ك اكبر من نسبة مربع ا ح الى فضل ما بين مربع ص د ومربع الضلع القائم
من الشكل المعمول عليه ففضل ما بين مربع ح ك ومربع الضلع القائم من الشكل المعمول عليه اكبر من فضل
ما بين مربع ث د ومربع الضلع القائم من الشكل المعمول عليه : وايضا فان نسبة ص ق الى ص ك اعظم
من نسبة ص ط الى ط د لان ص ق اعظم من ص ك وص ط اصغر من ط د ولذلك تكون نسبة سطح ح ن
في ص ق الى سطح ح ن في ص ك اعظم من نسبة سطح ن ص في ص ط مرتين الى سطح ن ص في ط د مرتين ويتبين
من ذلك كما بينا انفا ان فضل ما بين مربع د ه ومربع الضلع القائم من الشكل المعمول عليه اكبر من فضل ما بين
مربع ح ك ومربع الضلع القائم من الشكل المعمول عليه وذلك ما اردنا ان نبين



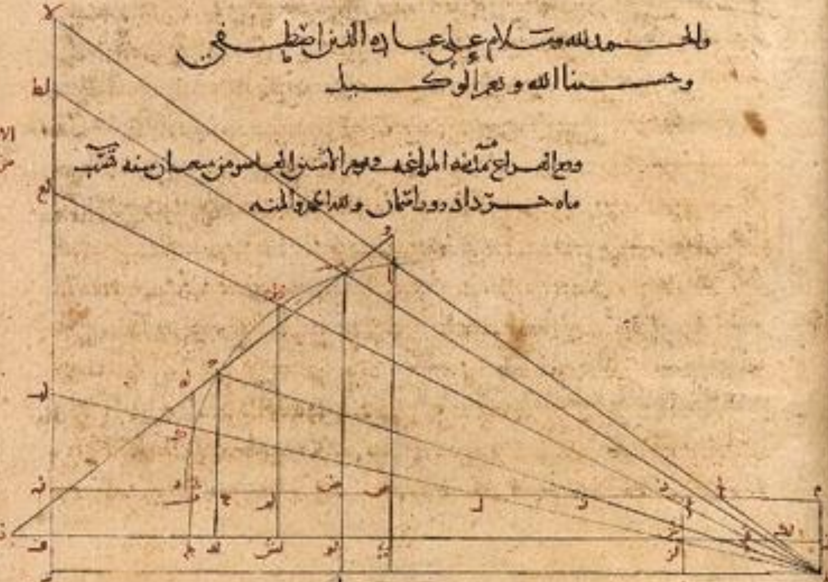
تمت المقالة السابعة

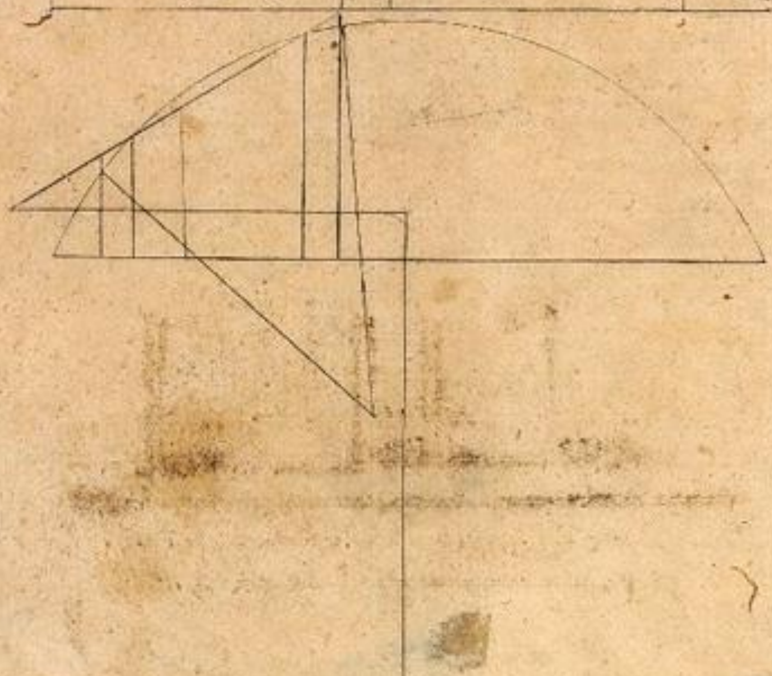
من كتاب ابلونيوس في المخروطات اخراج ثابت بن قرة واصلاح بني موسى وهي لا شكلا

وتم بتمامها جميع ما وجد من هذا الكتاب

والحمد لله وسلام على عباده الذين اصطفى
وحسبنا الله ونعم الوكيل

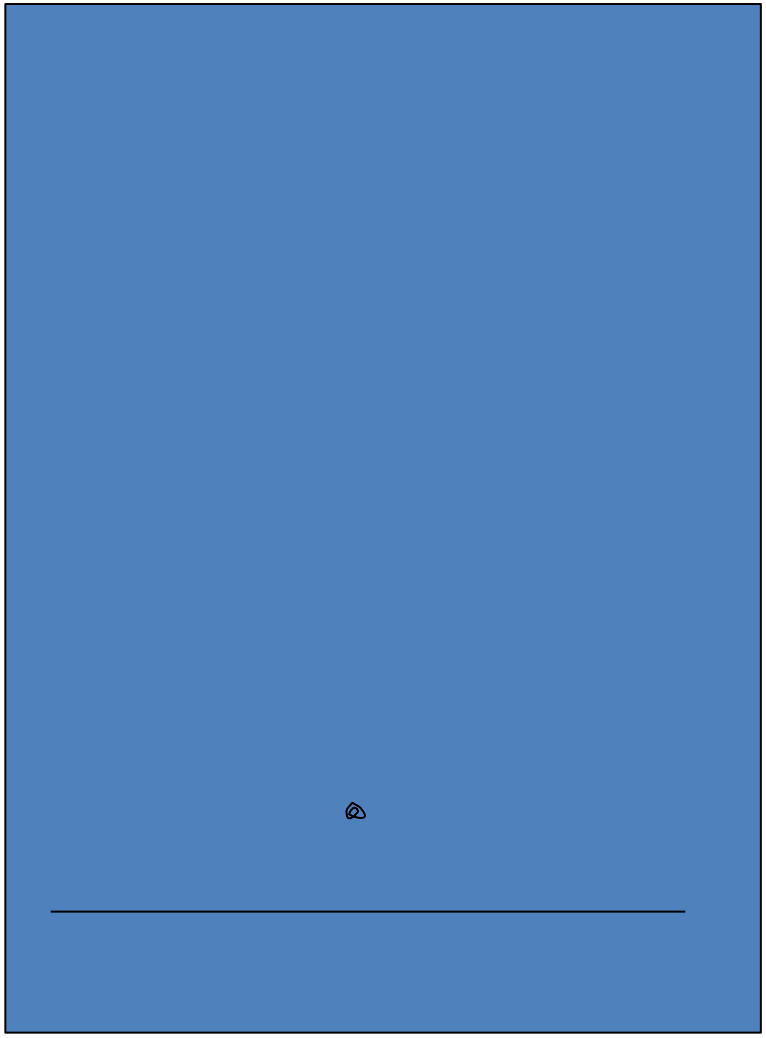
وقع الفراغ من نسخه المراغة في مدرسة الاستاذ ... من شعبان سنة ...
ماه خرداد ... ولله الحمد والمنة





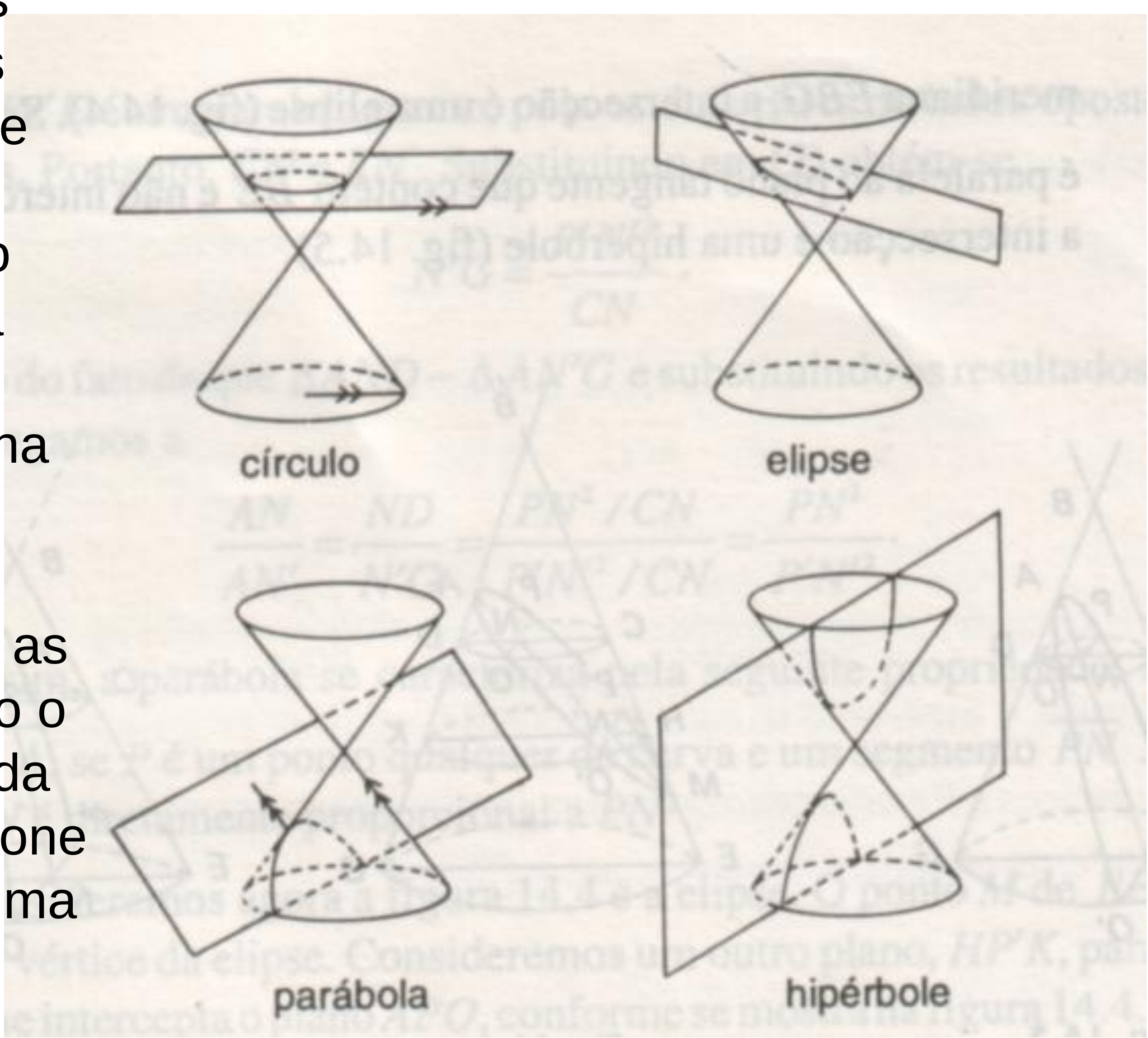
Parábolas:

"Lugar geométrico dos pontos equidistante a uma reta e um ponto fora dela".

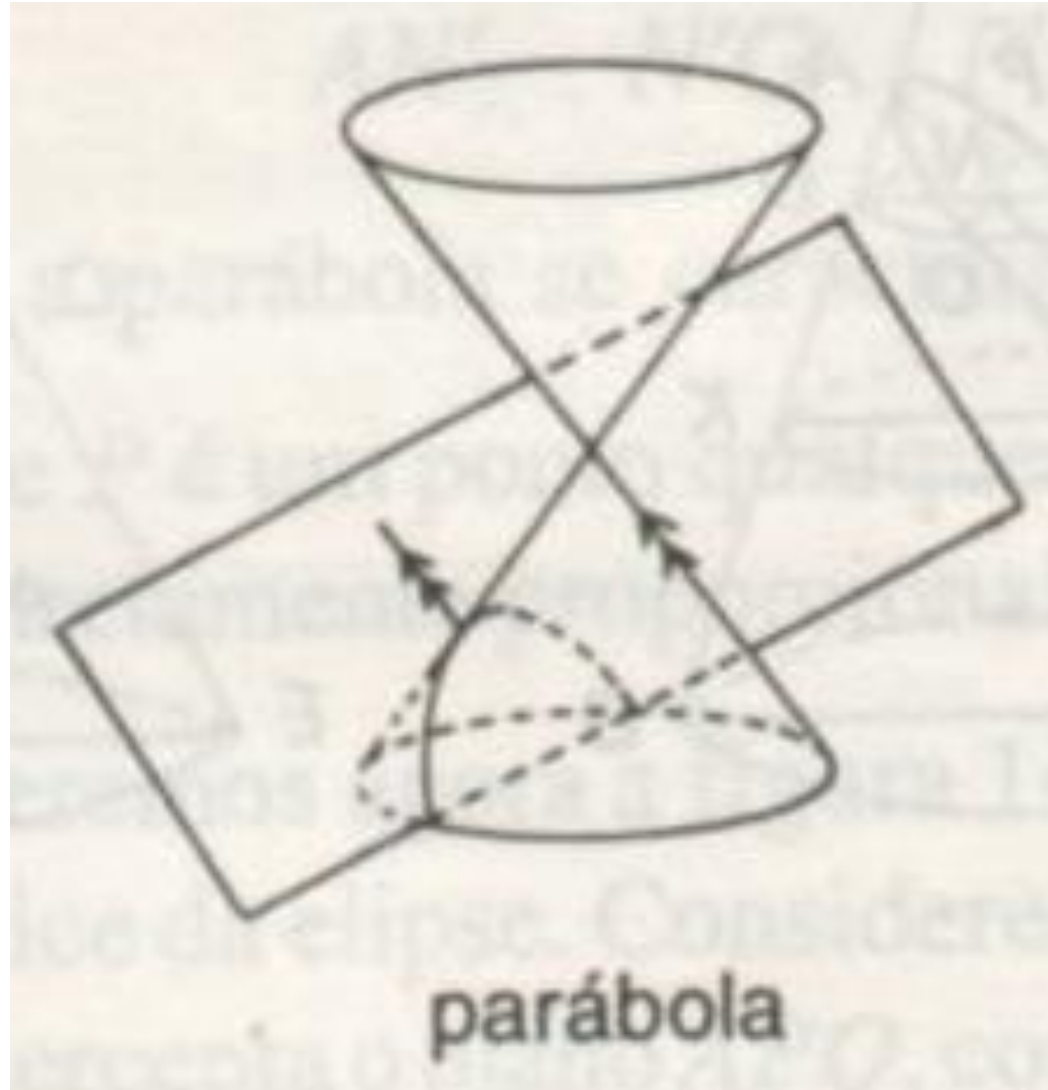


Os gregos antigos estudaram curvas associadas ao cone fornecem formas geométricas muito interessantes, e a matemática está presente na vida e na natureza.

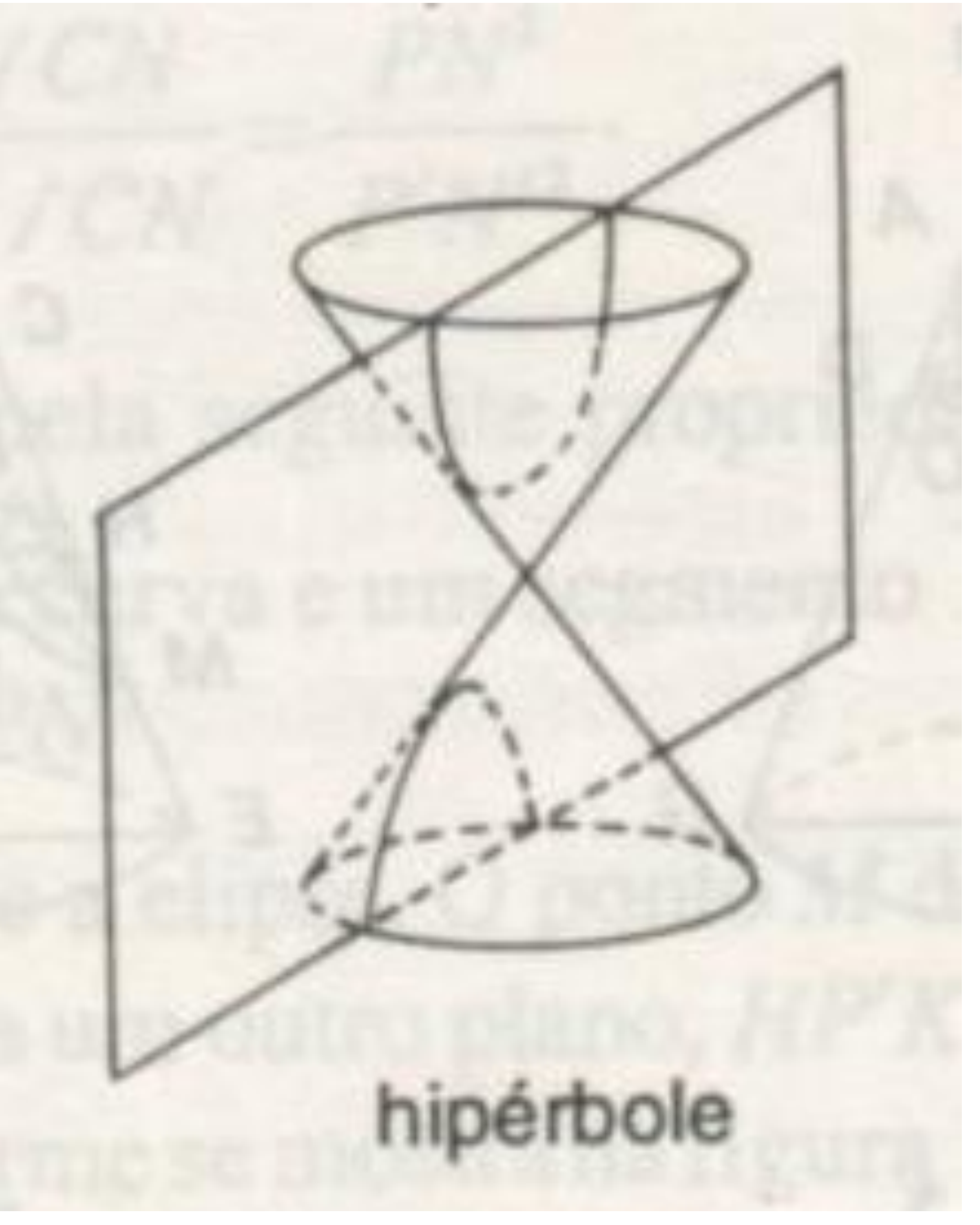
Podemos enxergar as cônicas observando o corte que o plano da parede faz em um cone de luz emitido por uma lanterna.



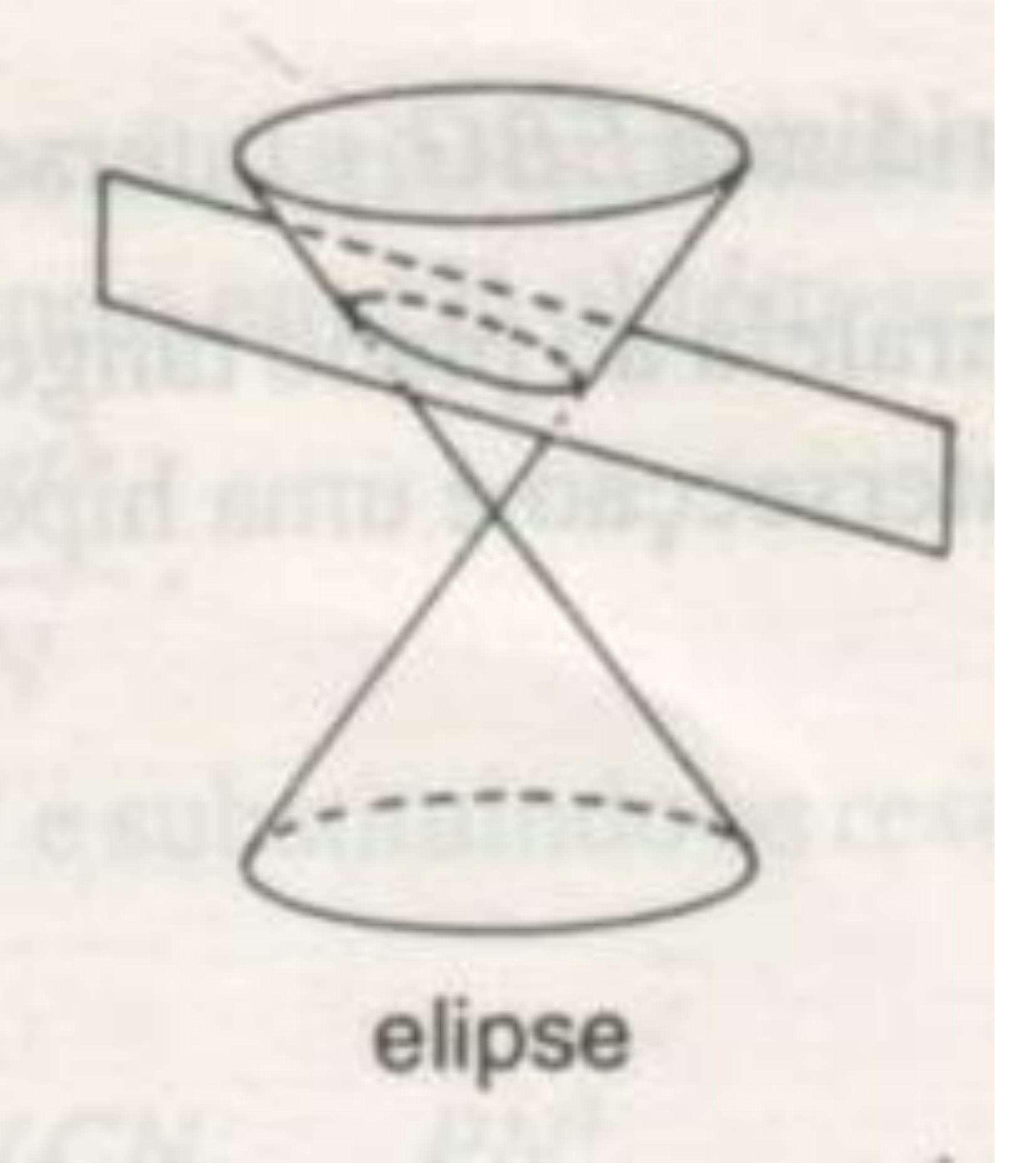
As cônicas foram primeiro identificadas por Menaecmos em 340 aC e depois estudadas por Apolônio (262-200 aC).



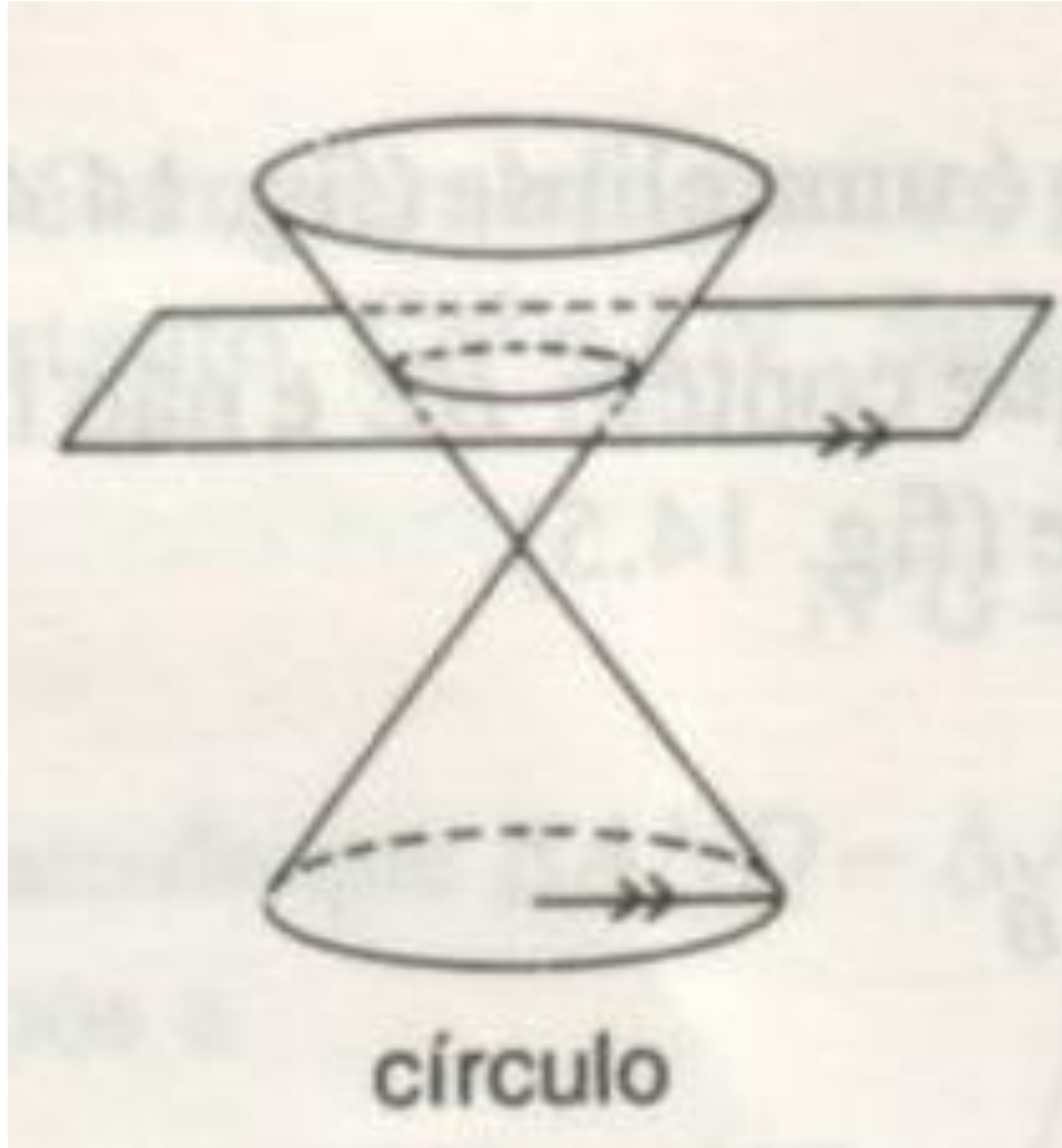
As cônicas foram primeiro identificadas por Menaecmos em 340 aC e depois estudadas por Apolônio (262-200 aC).



As cônicas foram primeiro identificadas por Menaecmos em 340 aC e depois estudadas por Apolônio (262-200 aC).



As cônicas foram primeiro identificadas por Menaecmos em 340 aC e depois estudadas por Apolônio (262-200 aC).



Cônicas e a duplicação do cubo

O interesse grego pelas secções cônicas provavelmente teve início na tentativa de resolver o problema clássico da duplicação do cubo, um dos três problemas insolúveis da Grécia Antiga (insolúveis, dentro da Geometria, com os instrumentos euclidianos, isto é, com régua sem marcas e compasso. Os outros dois são a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo).

Os três clássicos problemas de construção com régua e compasso

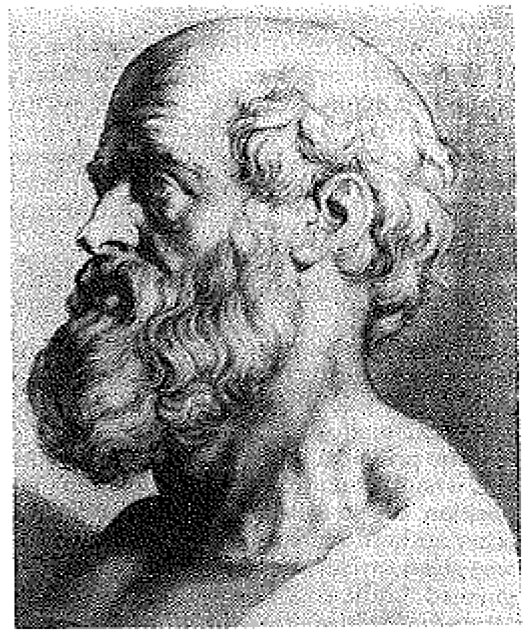
Duplicação do cubo: construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.

Trissecção de um ângulo: dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais.

Quadratura do círculo: construir um quadrado com área igual à de um dado círculo.

Uma das histórias do problema da duplicação do cubo diz que, para se verem livres de uma peste, os habitantes de Delos teriam recebido orientação do Oráculo de Apolo para dobrar o tamanho do altar desse deus, que tinha o formato de um cubo. Tal problema teria sido levado à Academia de Platão, onde foram sugeridos vários procedimentos.

Por volta de 440 a.C., Hipócrates reduziu o problema à obtenção de duas médias proporcionais (digamos, x e y) entre dois segmentos de retas medindo a e 2a. Talvez ele tenha observado as seguintes relações entre as arestas de um cubo e do cubo duplicado: sendo **a** a aresta de um cubo original e **x** a do cubo duplicado a partir deste, temos $2a^3 = x^3$. Duplicando x^3 e chamando a nova aresta de y, obtemos $2x^3 = y^3$. Através de nova duplicação, chegamos a $2y^3 = 4x^3 = 8a^3 = (2a)^3$.



Hipócrates de Cós
(aprox. 470-410 a.C.)

Ou seja, há uma proporcionalidade entre os segmentos a, x, y e 2a do tipo: a:x :: x:y :: y:2a. Em notação moderna, podemos escrever as proporções por meio das igualdades $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, que são equivalentes às duas equações de parábolas: $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$.

Mais tarde, Menaecmus (aprox. 380-320 a.C.) descobriu que o problema poderia ser resolvido pelo estudo de um cone circular com um ângulo reto no vértice, e, provavelmente, foi o primeiro a identificar uma família de novas curvas, que mais tarde receberiam os nomes de **elipse**, **parábola** e **hipérbole**.

Seu raciocínio contava apenas com a Matemática da época; ele não foi auxiliado pela notação algébrica da Geometria Analítica, nem pôde utilizar esquemas traçados em um plano cartesiano. Menaecmus propunha que se poderiam encontrar as médias x e y de Hipócrates observando o encontro de duas parábolas no cone, o que, em notação moderna, significaria resolver o sistema de duas equações: $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$. O ponto de encontro das parábolas indicaria os valores de x e y, tais que $a/x = x/y = y/2a$.

A. Mostre que, partindo das equações das parábolas acima, é possível provar que as coordenadas (x, y) da sua intersecção $(\neq (0,0))$ satisfazem $x^3 = 2a^3$ e $y^3 = 4a^3$.

B. Partindo do item A, conclua que $a/x = x/y = y/2a = 1/2^{1/3}$.

Observe que obtivemos algo que nos parece evidente: $x = 2^{1/3}a$; sabemos que essa igualdade é equivalente a $x^3 = 2a^3$. Embora os gregos não trabalhassem com Álgebra simbólica, nem com representações de números irracionais, mostraram que o problema da duplicação do cubo poderia ser resolvido por meio de construções geométricas, utilizando secções cônicas. Isso se daria de modo análogo à solução geométrica para a duplicação do quadrado, no caso do problema de Sócrates. A associação entre a idéia de proporcionalidade, mais presente no estudo das semelhanças, e outras idéias, como medidas de volumes e áreas, é bem típica da contribuição grega para o crescimento da Geometria.

Na Europa, as invasões bárbaras e o crescimento do cristianismo levaram ao declínio da cultura clássica antiga.

Morte de Hipatia (370-415)

Fim do Império Romano do Ocidente (476)

O imperador Justiniano (482-565) fecha as ultimas escolas e academias filosóficas.

Iniciou-se a Idade Media.

Estudiosos europeus: acolhidos em cidades da Pérsia e em Bagdá

Casa da Sabedoria de Bagdá: estudos de Matemática continuavam a se desenvolver.

Cria-se uma nova Álgebra.

Omar Khayyam (1050-1122):

poeta, astrônomo e matemático persa.

Escreveu sua *Álgebra* propondo resolver equações até do terceiro grau por métodos geométricos:

seções cônicas:

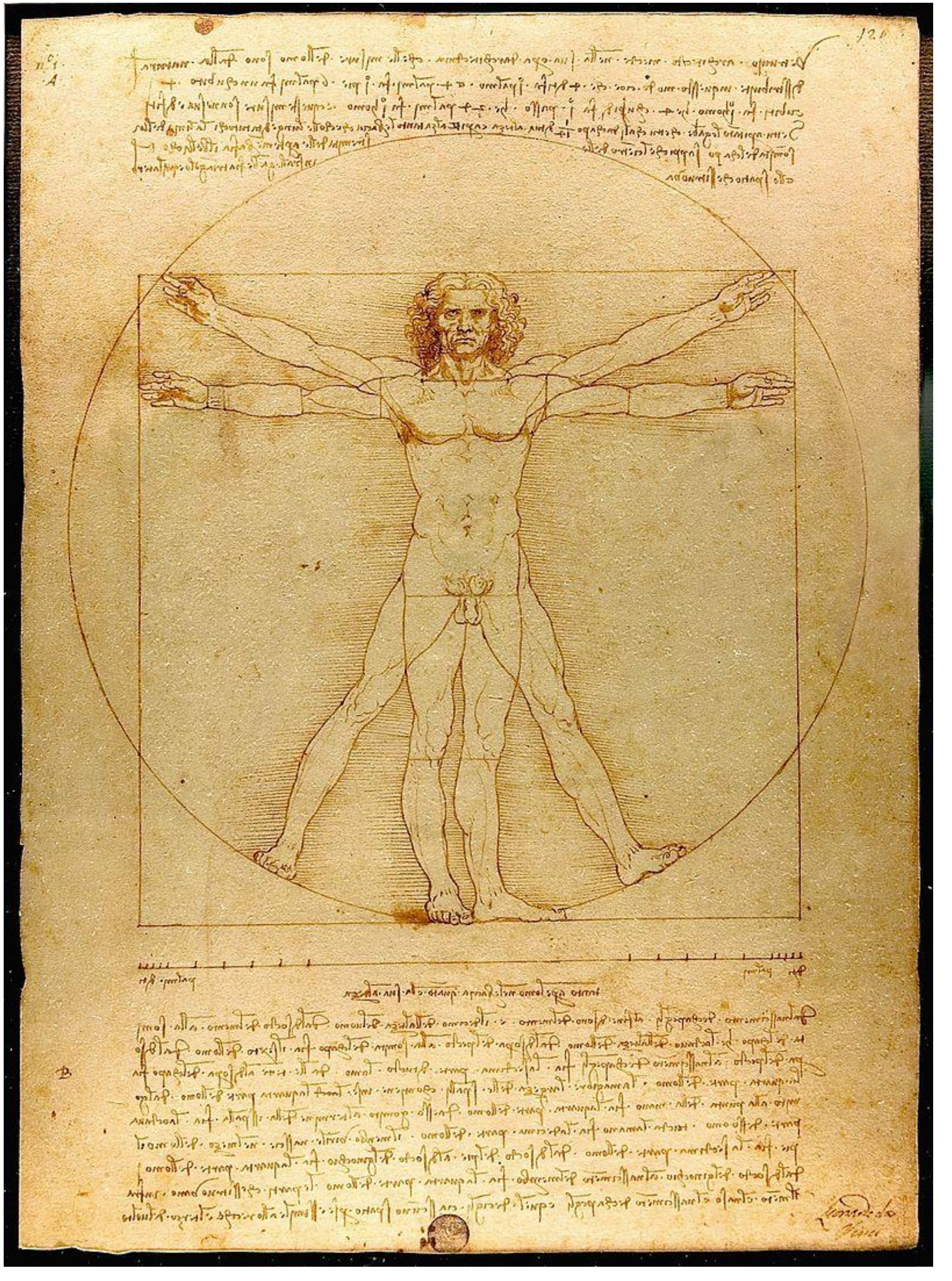
parábolas, hipérboles e elipses.

Omar Khayyam aproximou Algebra e Geometria.

Tomada da cidade de Constantinopla pelos turcos otomanos em 1453.

Fim do Império Romano do Oriente e da Idade Media.

Entre o final do século XIV e o final do século XVII: Renascimento.

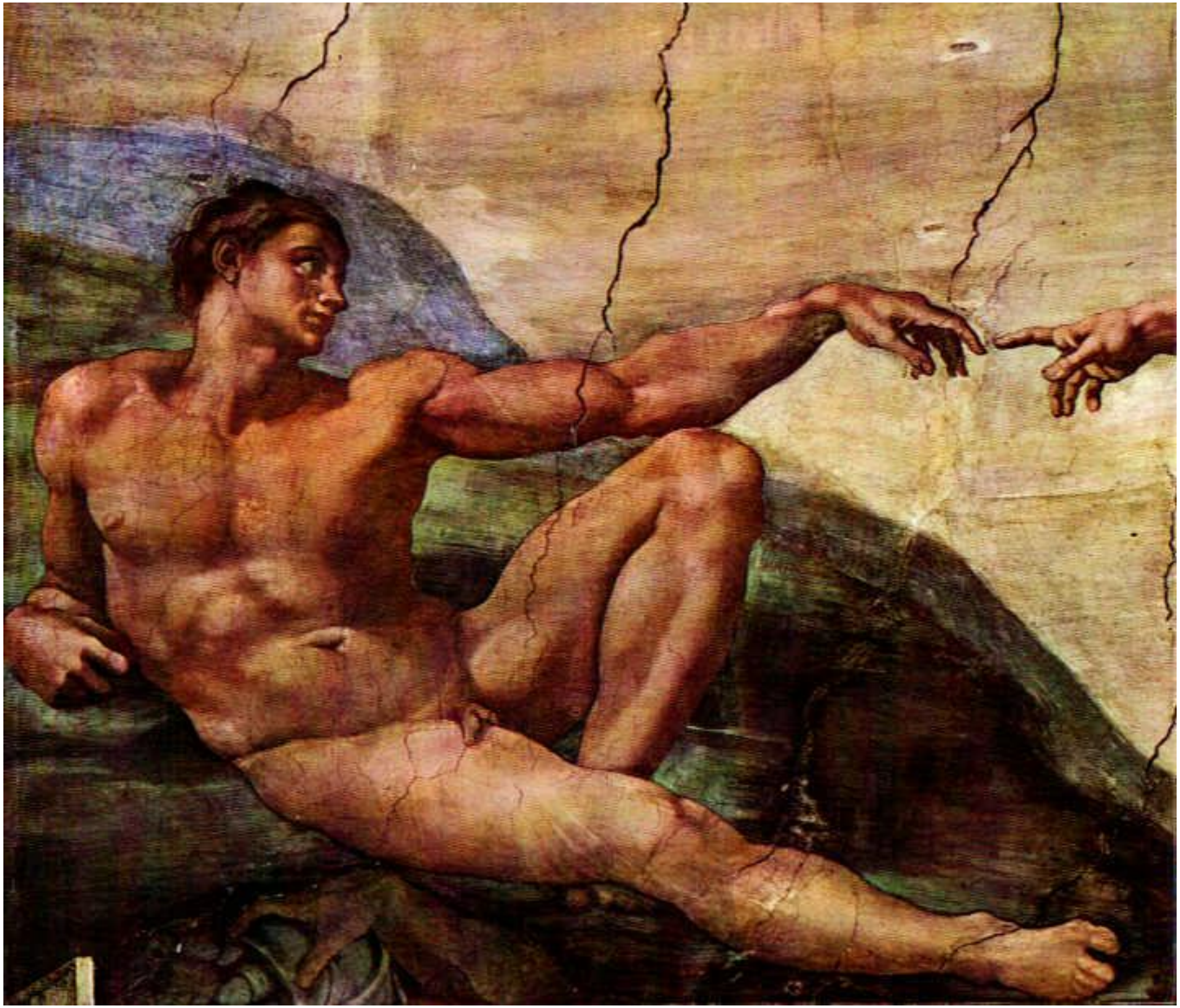


No Renascimento, a Europa passou a produzir uma nova arte, filosofia e ciência.

Alessandro Botticelli (1444-1510) Alegoria da Primavera

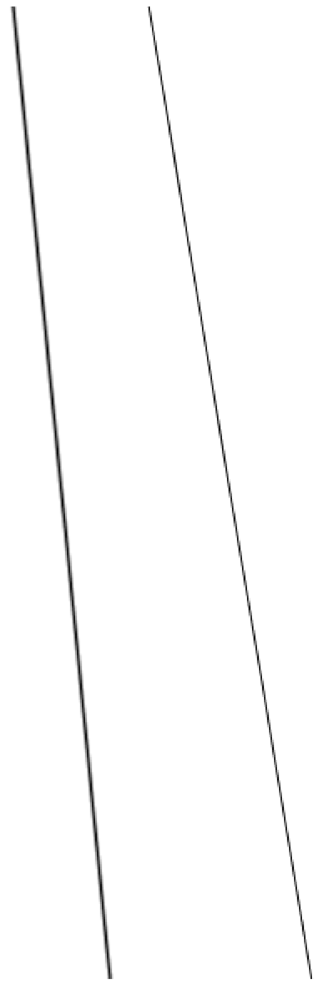
Com o renascimento, a Europa passou a produzir uma nova arte, filosofia e ciência.

Alessandro Botticelli (1444-1510) O Nascimento de Venus



Com mais liberdade e uma visão em que o homem era o centro de todas as coisas, iniciou-se uma forma nova de abordar a vida e a ciência.

Galileu Galileu (1564-1642) incentiva seus discípulos a pesquisarem sobre o movimento e seus princípios científicos.



Galileu Galileu (1564-1642) incentiva seus discípulos a pesquisarem sobre o movimento e seus princípios científicos.

Tradução da Álgebra árabe no continente europeu: novos estudiosos de Matemática.

François Viète (1540-1603): denominou sua Álgebra de “arte analítica”

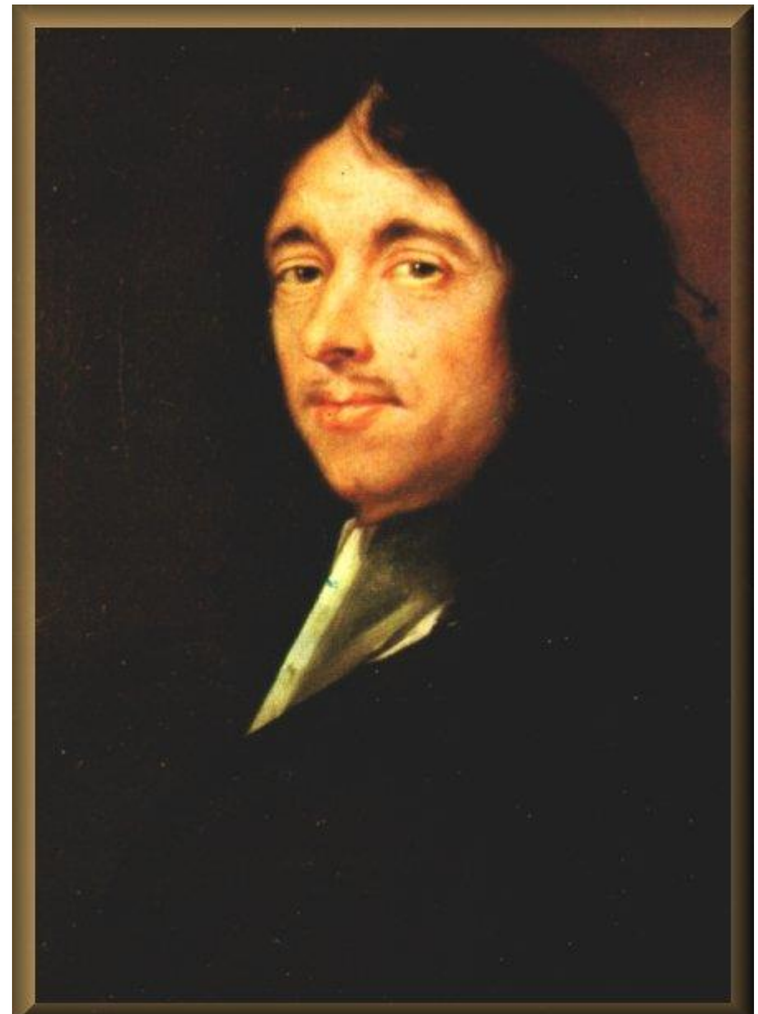
Analise: decomposição ou separação.

Ao resolver equações há o processo de subdivisão de uma expressão maior em outras menores.

Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) passaram a trabalhar na relação entre Geometria e Álgebra.

Isto é, entre

Geometria e a Arte Analítica, originando assim a Geometria analítica.



O século XVII foi fértil em descobertas científicas em diversas áreas. Neste quadro, na mesa ao lado direito, vemos a rainha Cristina da Suécia (1626-1689) e René Descartes.

Cristina e Descartes que conversam frente a frente na mesa.

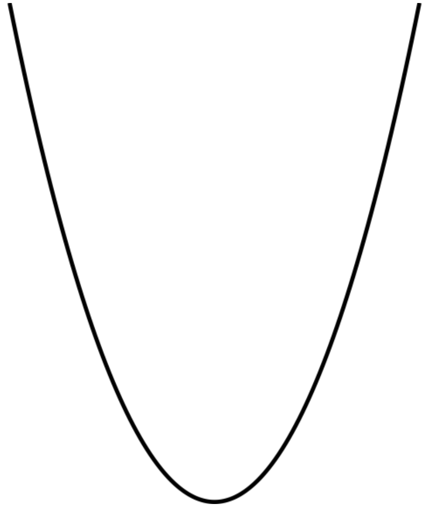
Século XVII na Europa: a Idade da Razão.

Geometria grega: lugar geométrico, construções com régua e compasso de curvas e formas.

Álgebra árabe: relação entre equações e geometria.

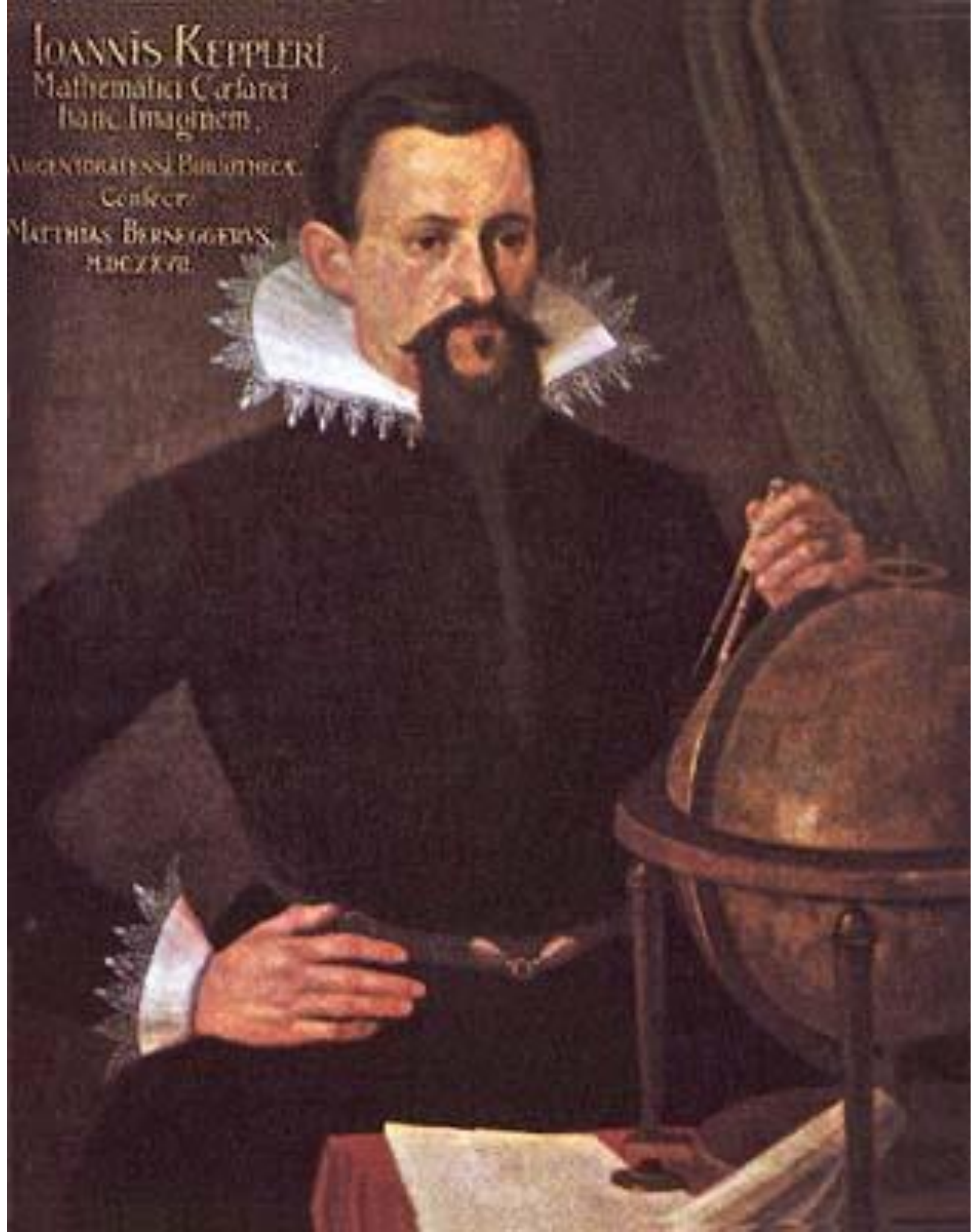
Fermat e Descartes: Geometria analítica:

Ponte entre os dois “mundos”: a geometria grega e a álgebra árabe.



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

As cônicas aparecem nas leis de Kepler (1571-1630), que explicam os movimentos dos planetas.

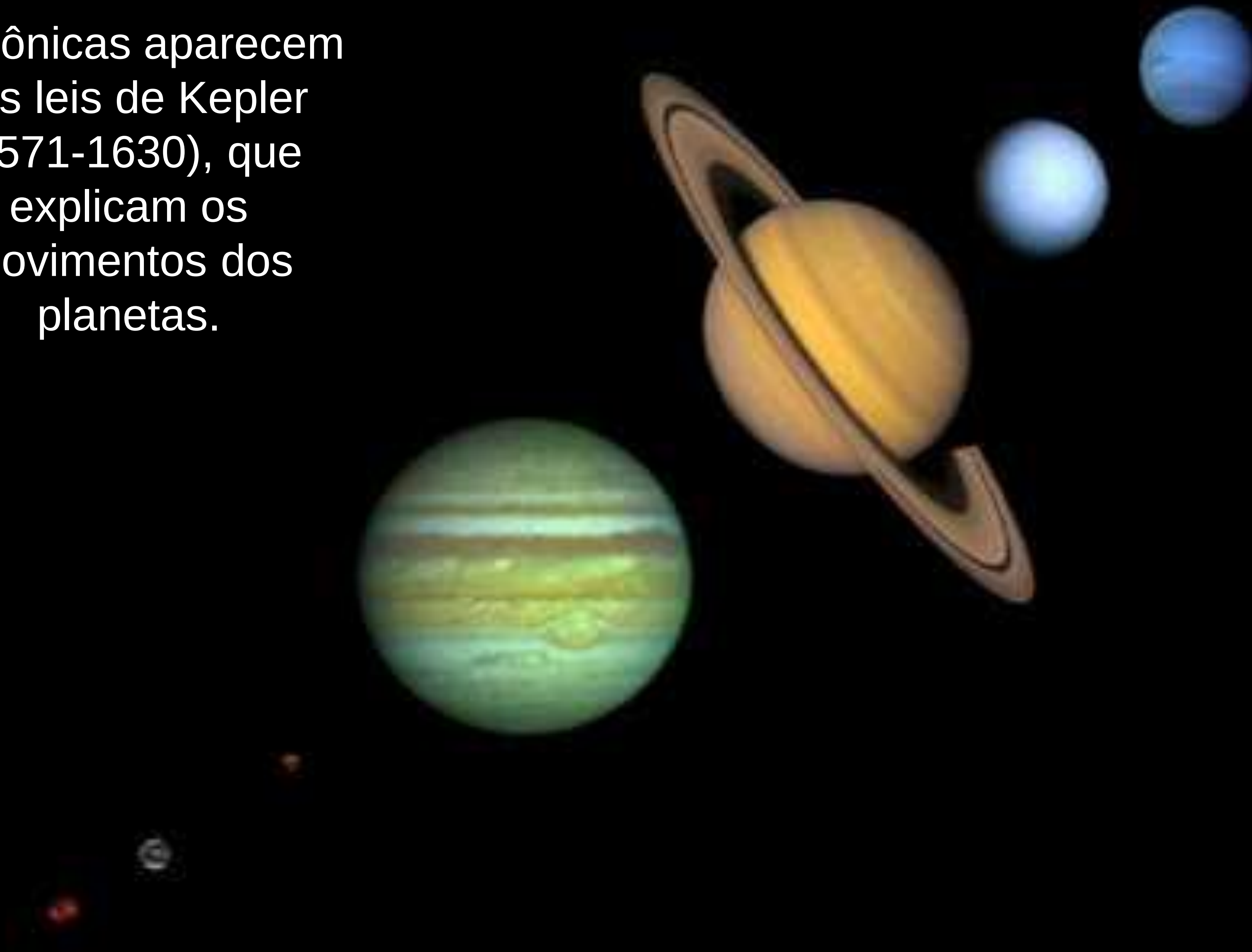


As cônicas aparecem nas leis de Kepler (1571-1630), que explicam os movimentos dos planetas.

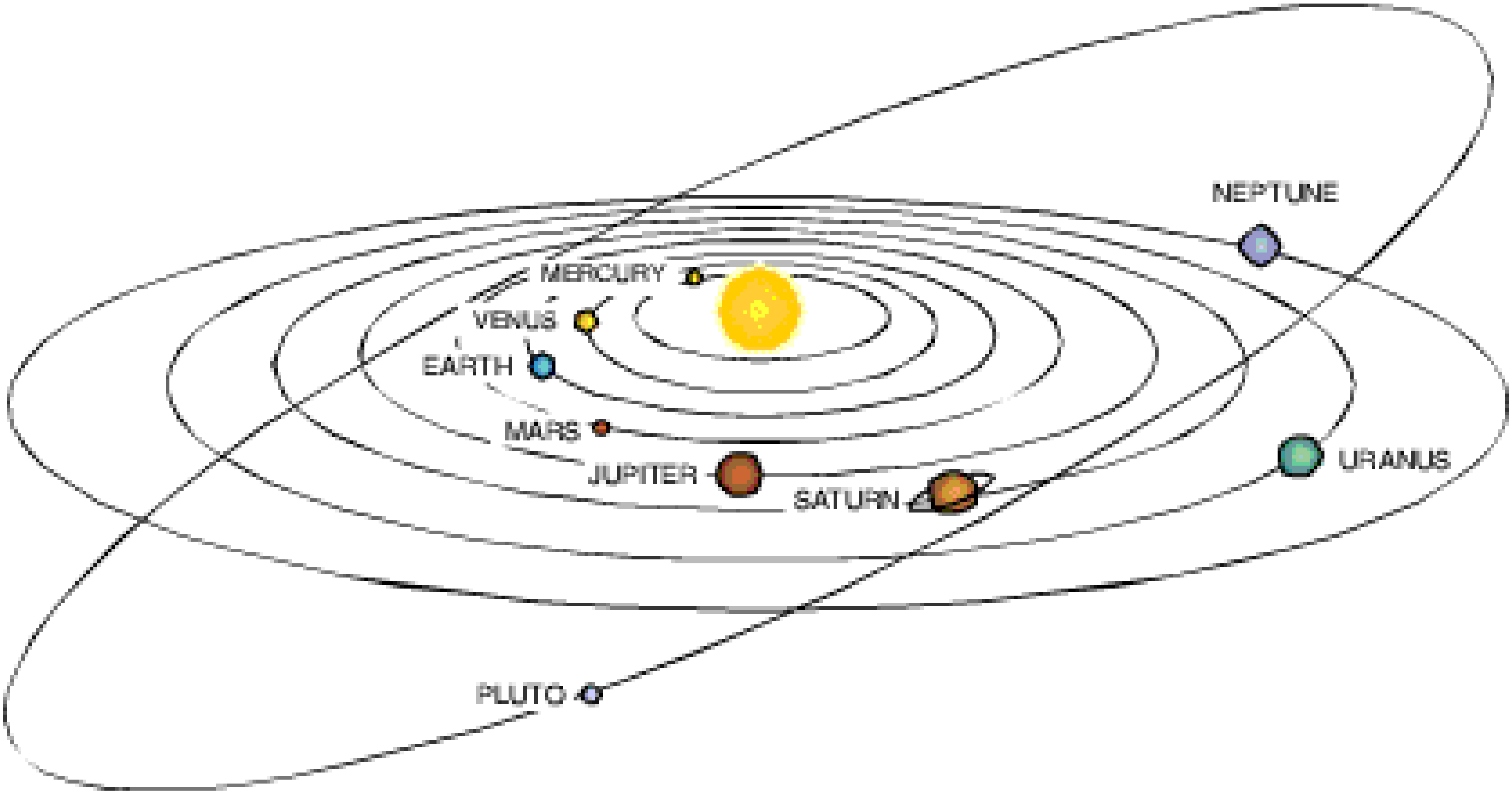
As cônicas aparecem nas leis de Kepler (1571-1630), que explicam os movimentos dos planetas.

As cônicas aparecem nas leis de Kepler (1571-1630), que explicam os movimentos dos planetas.

As cônicas aparecem
nas leis de Kepler
(1571-1630), que
explicam os
movimentos dos
planetas.

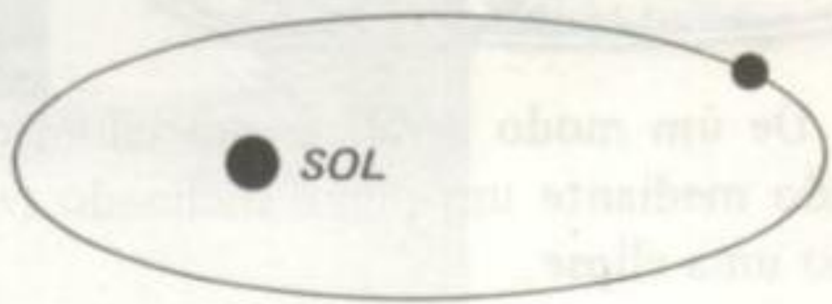


As órbitas dos planetas do sistema solar são elipses



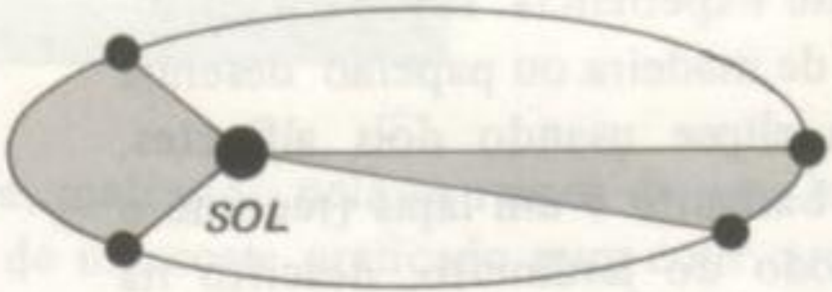
As cônicas aparecem nas leis de Kepler (1571-1630), que explicam os movimentos dos planetas.

1ª lei de Kepler: Os planetas giram em torno do Sol, em órbitas elípticas, nas quais o Sol ocupa sempre um dos focos.



As cônicas aparecem nas leis de Kepler (1571-1630), que explicam os movimentos dos planetas.

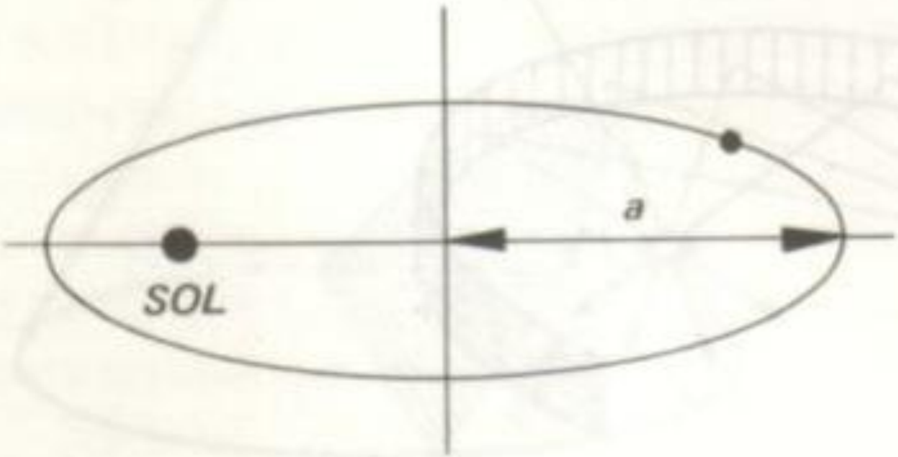
2ª lei de Kepler: A linha que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.



Assim, como conseqüência desta lei, um planeta se move mais depressa quando próximo do Sol (periélio), e mais devagar quando longe dele (afélio).

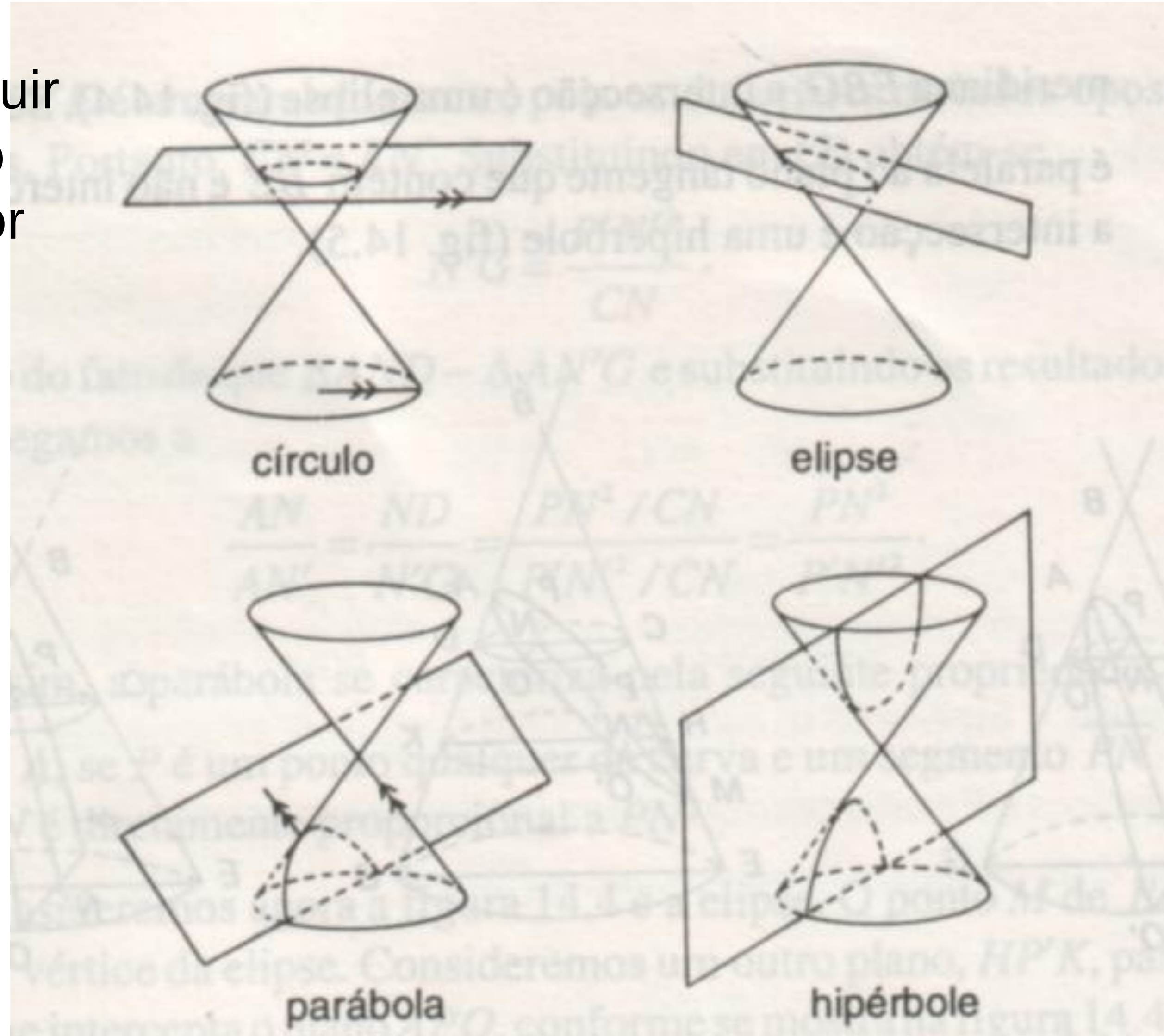
As cônicas aparecem nas leis de Kepler (1571-1630), que explicam os movimentos dos planetas.

3ª lei de Kepler: O quadrado do tempo T, necessário para um planeta completar uma volta em torno do Sol, é proporcional ao cubo do semi-eixo maior a da elipse.

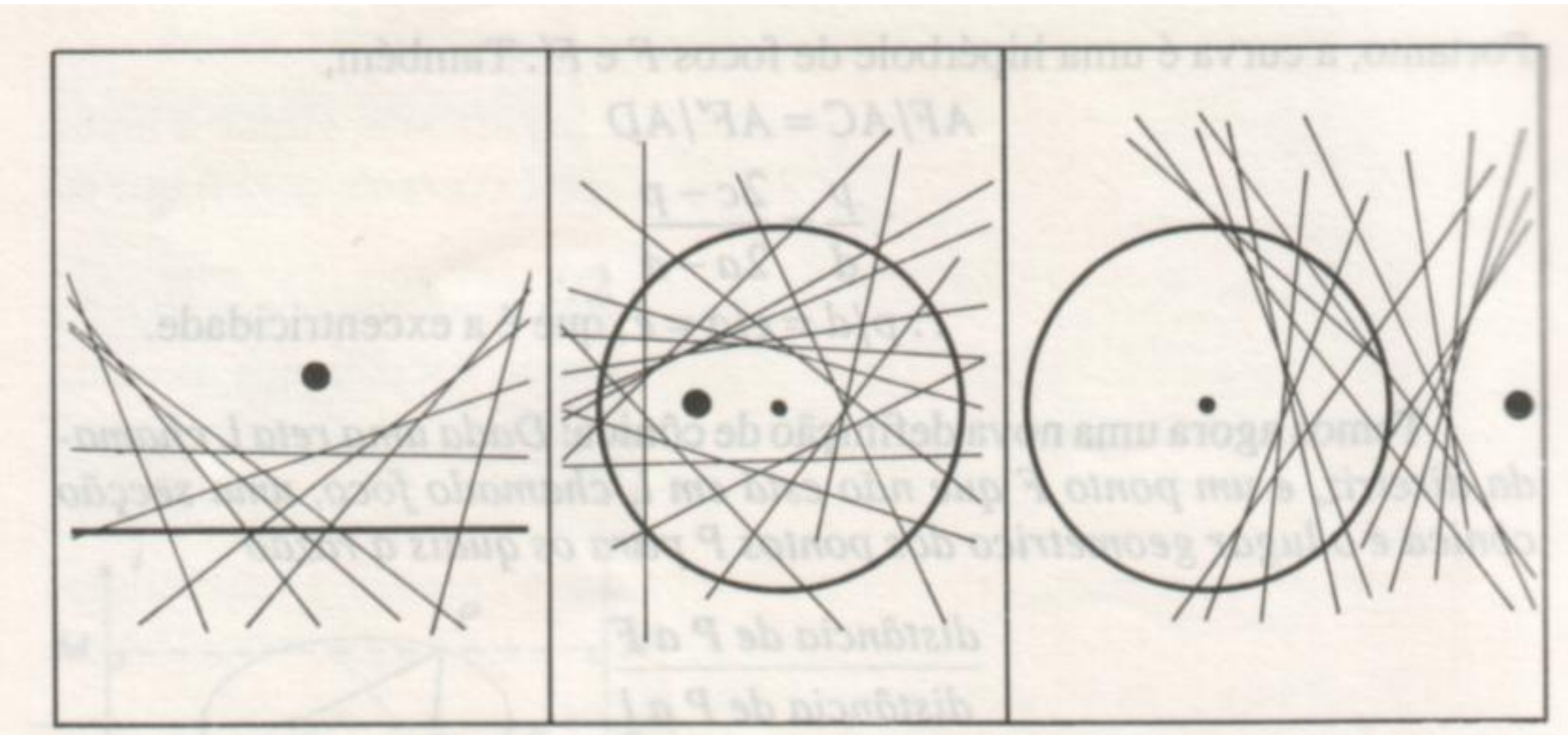


$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

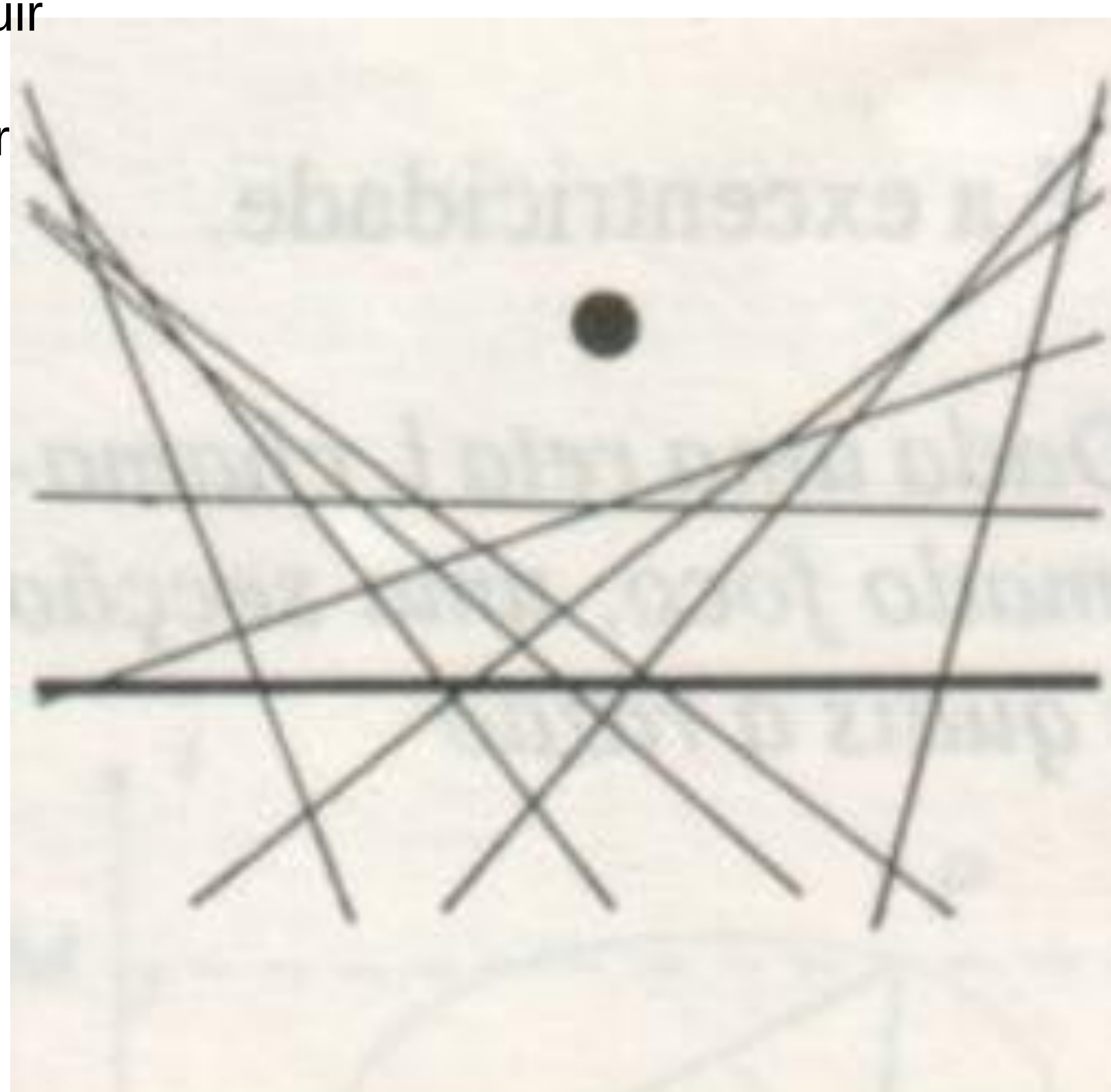
Agora, vamos construir as cônicas usando modelos obtidos por dobradura.



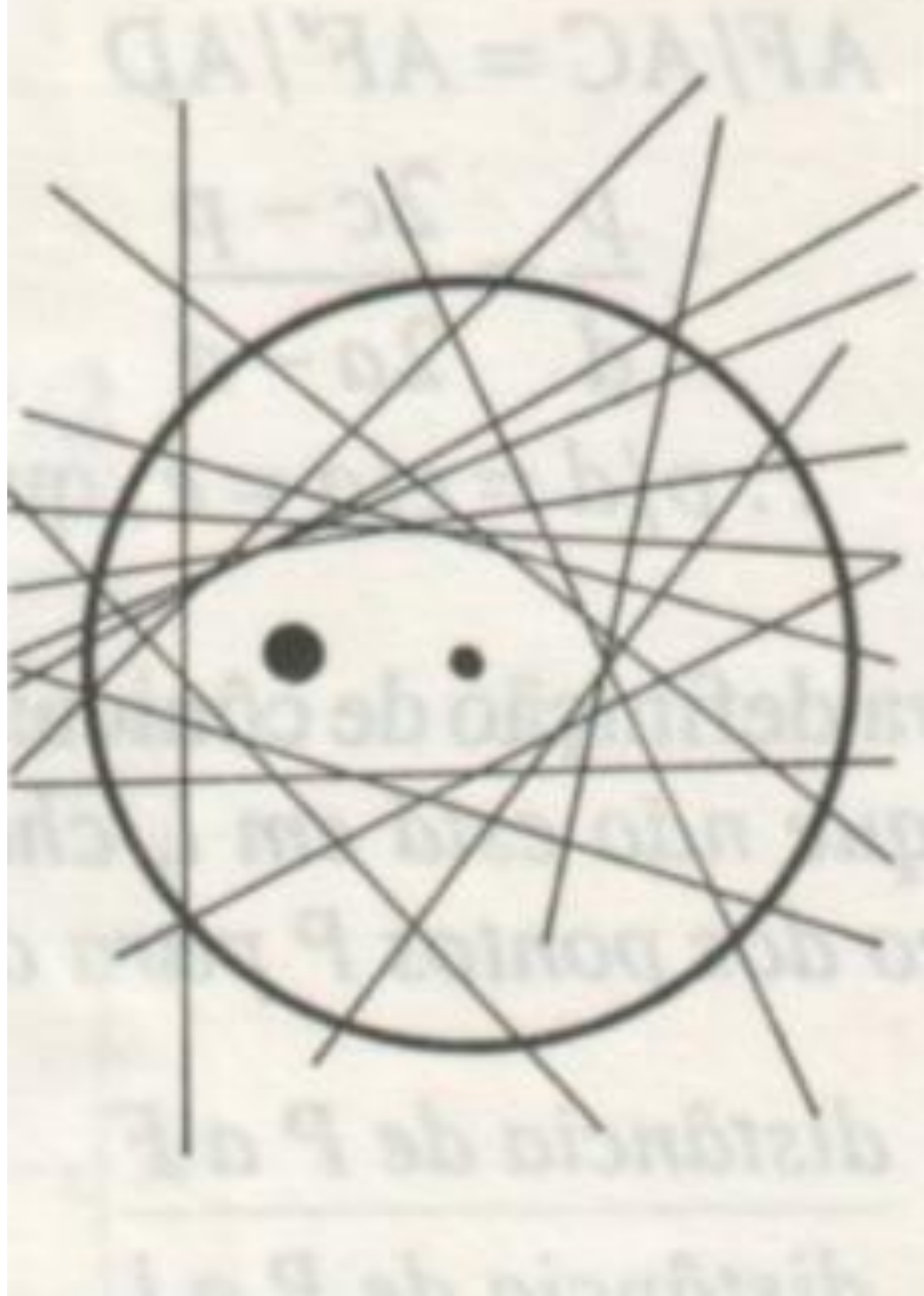
Agora, vamos construir as cônicas usando modelos obtidos por dobradura.



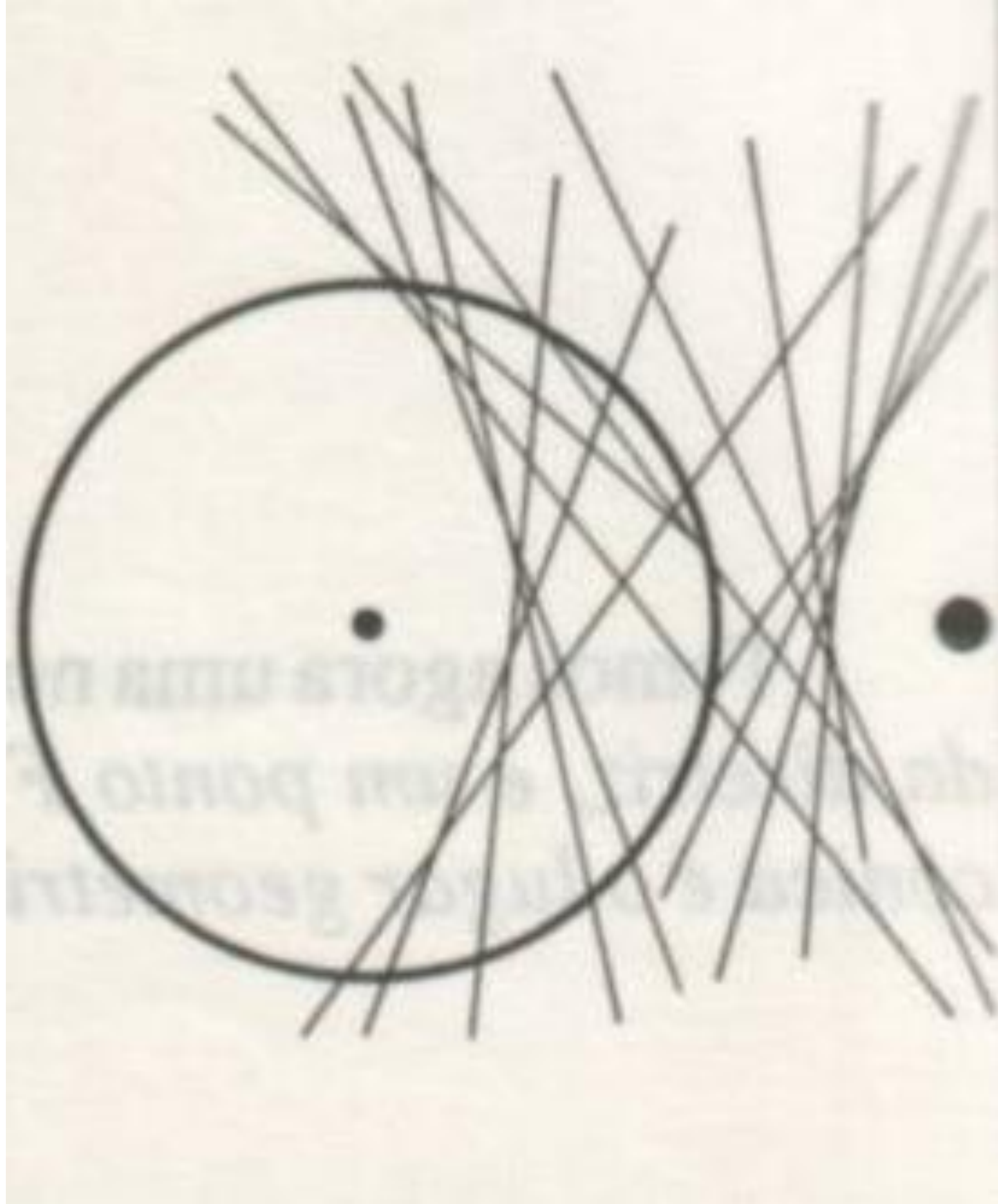
Agora, vamos construir as cônicas usando modelos obtidos por dobradura.



Agora, vamos construir as cônicas usando modelos obtidos por dobradura.



Agora, vamos construir as cônicas usando modelos obtidos por dobradura.



As cônicas definidas
por lugar geométrico
podem ser construídas
a partir de suas
propriedades básicas,
usando folhas
apropriadas.

Dada uma reta l, chamada diretriz, e um ponto F que não está em l, chamado foco, uma secção cônica é o lugar geométrico dos pontos P para os quais a razão

$$\frac{\text{distância de P a F}}{\text{distância de P a l}}$$

é constante.

Essa constante chama-se *excentricidade* da cônica (e).

Temos três casos:

0<e<1 $\Rightarrow$ elipse ("falta")

e=1 $\Rightarrow$ parábola ("comparação")

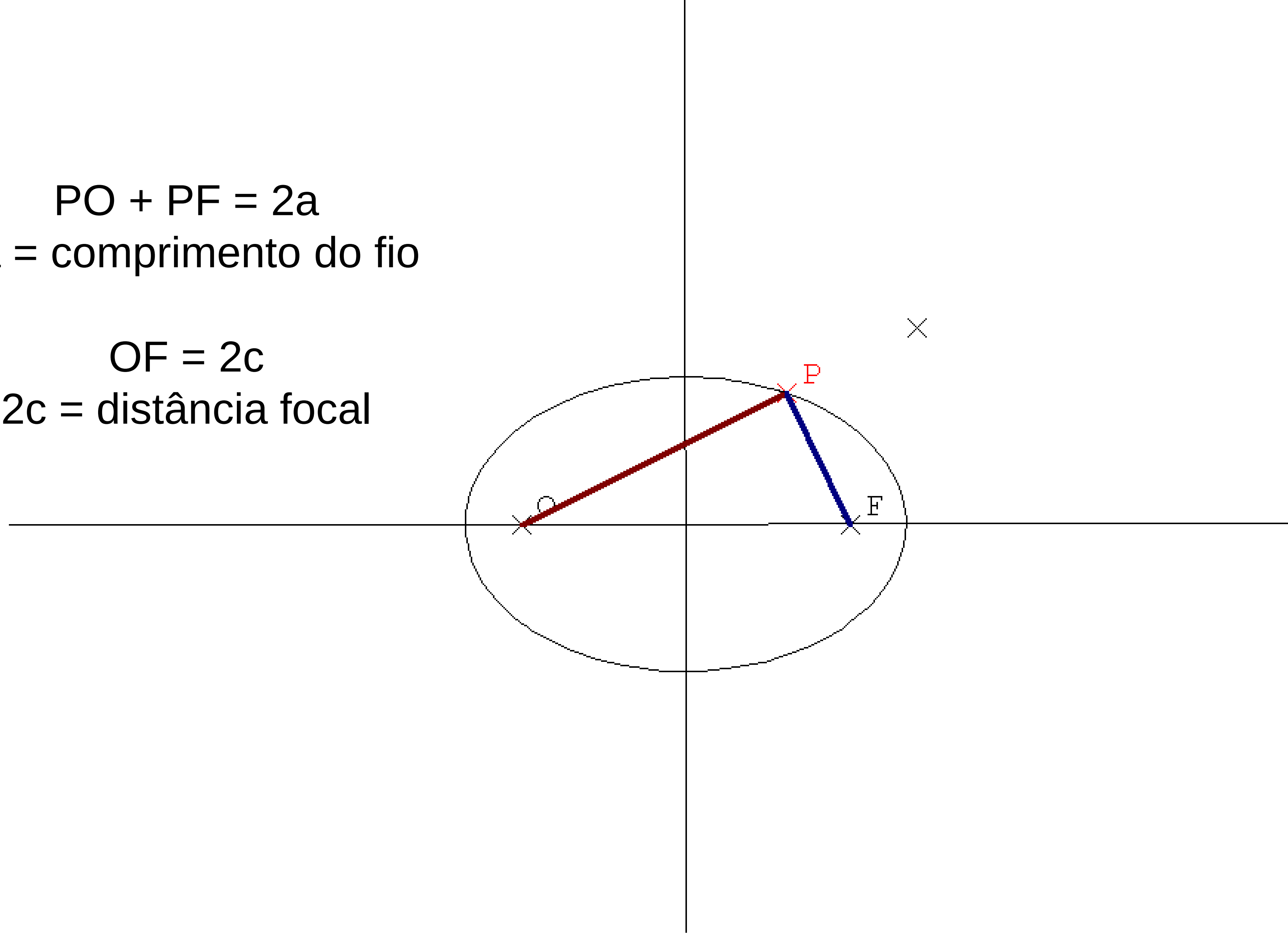
e>1 $\Rightarrow$ hipérbole ("excesso")

PO + PF = 2a

2a = comprimento do fio

OF = 2c

2c = distância focal



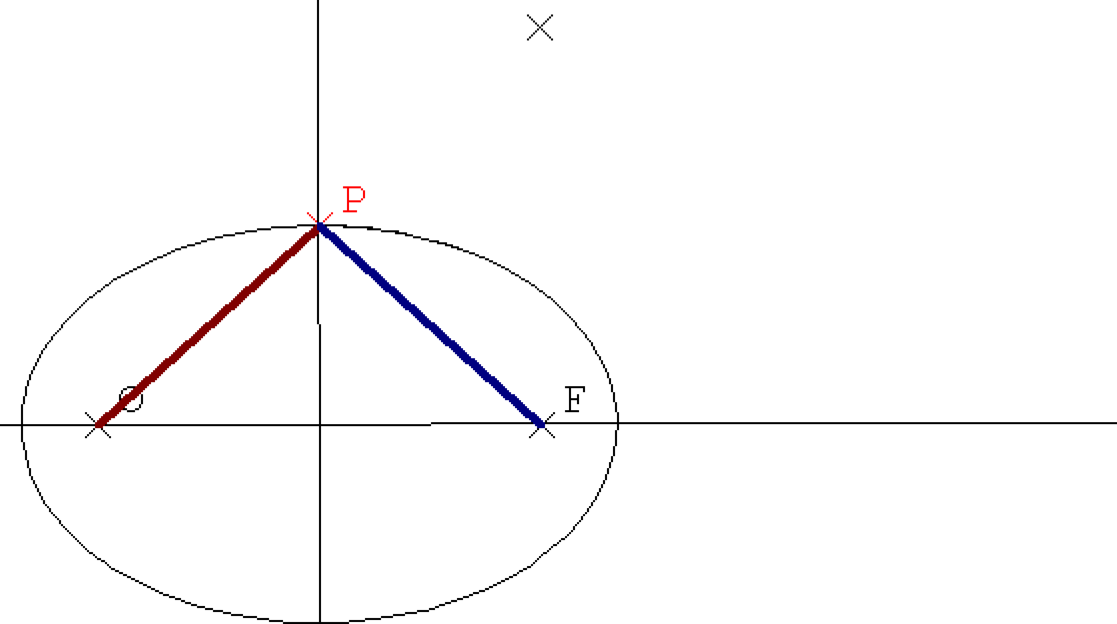
PO + PF = 2a

2a = comprimento do fio

a = semi-eixo maior

OF = 2c

2c = distância focal



$b^2 - a^2 = c^2$

$e = c/a$

$0 < e < 1$

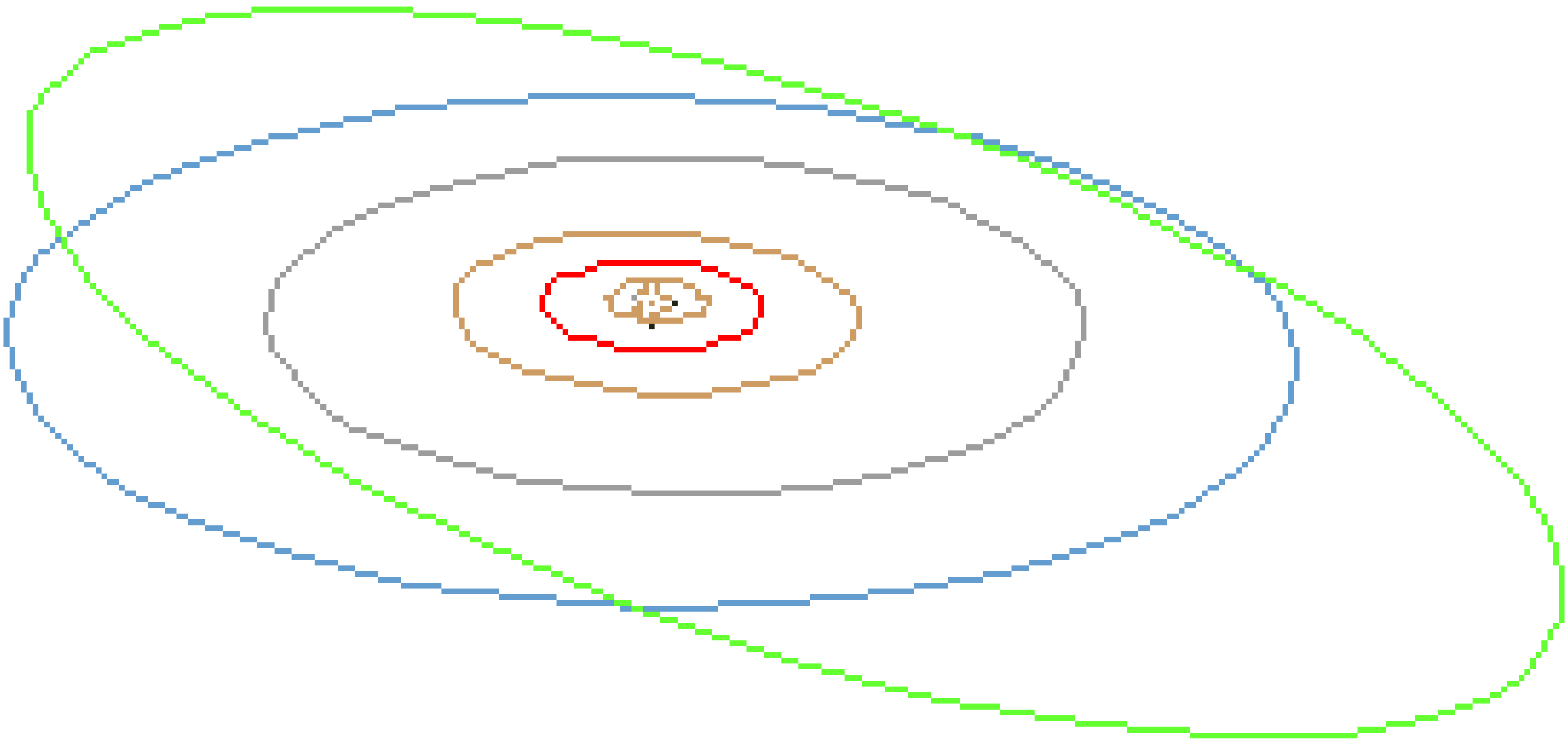
(excentricidade)

define o tipo da órbita

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

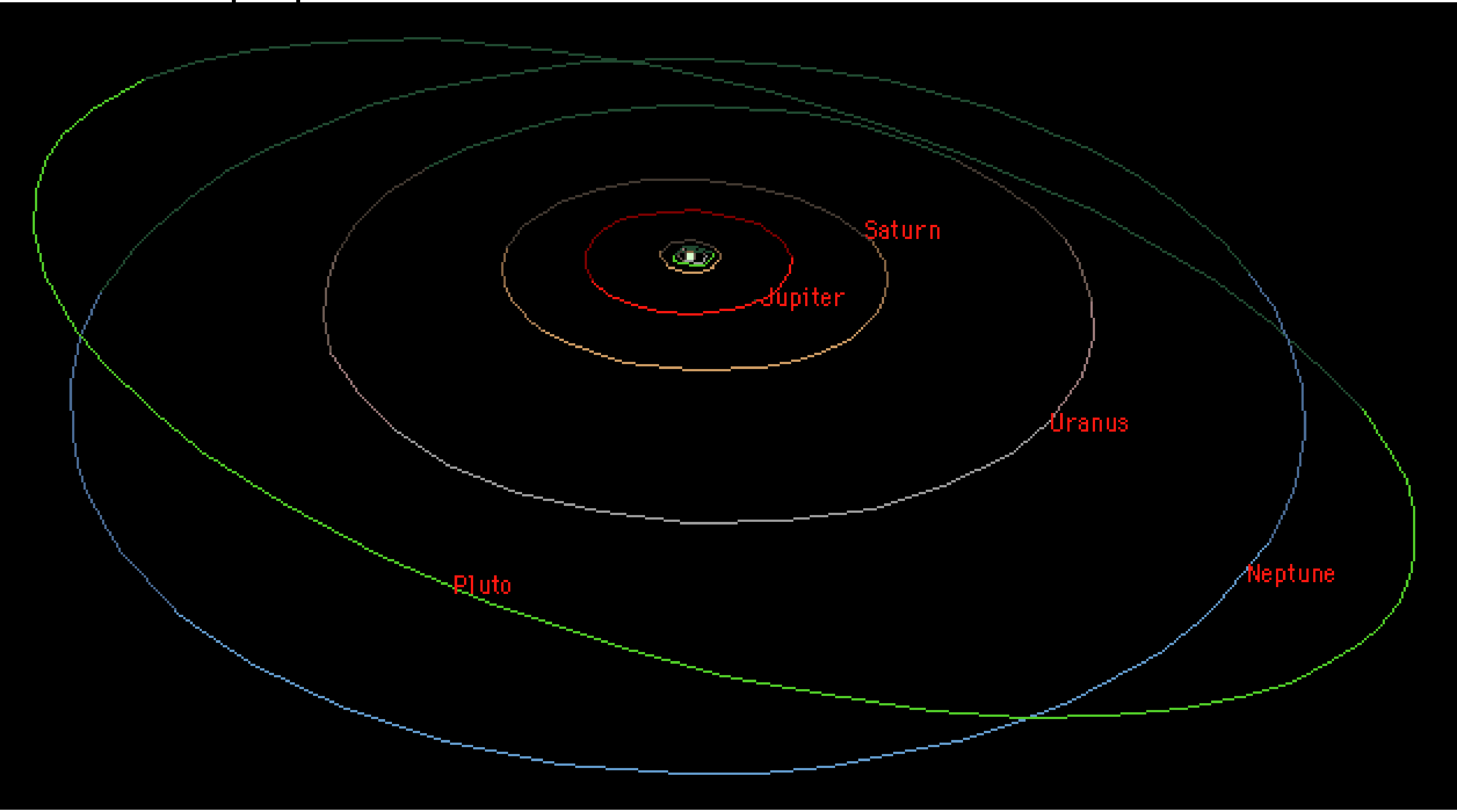
equação reduzida da elípse

As órbitas dos planetas do sistema solar são elípses com excentricidade pequena



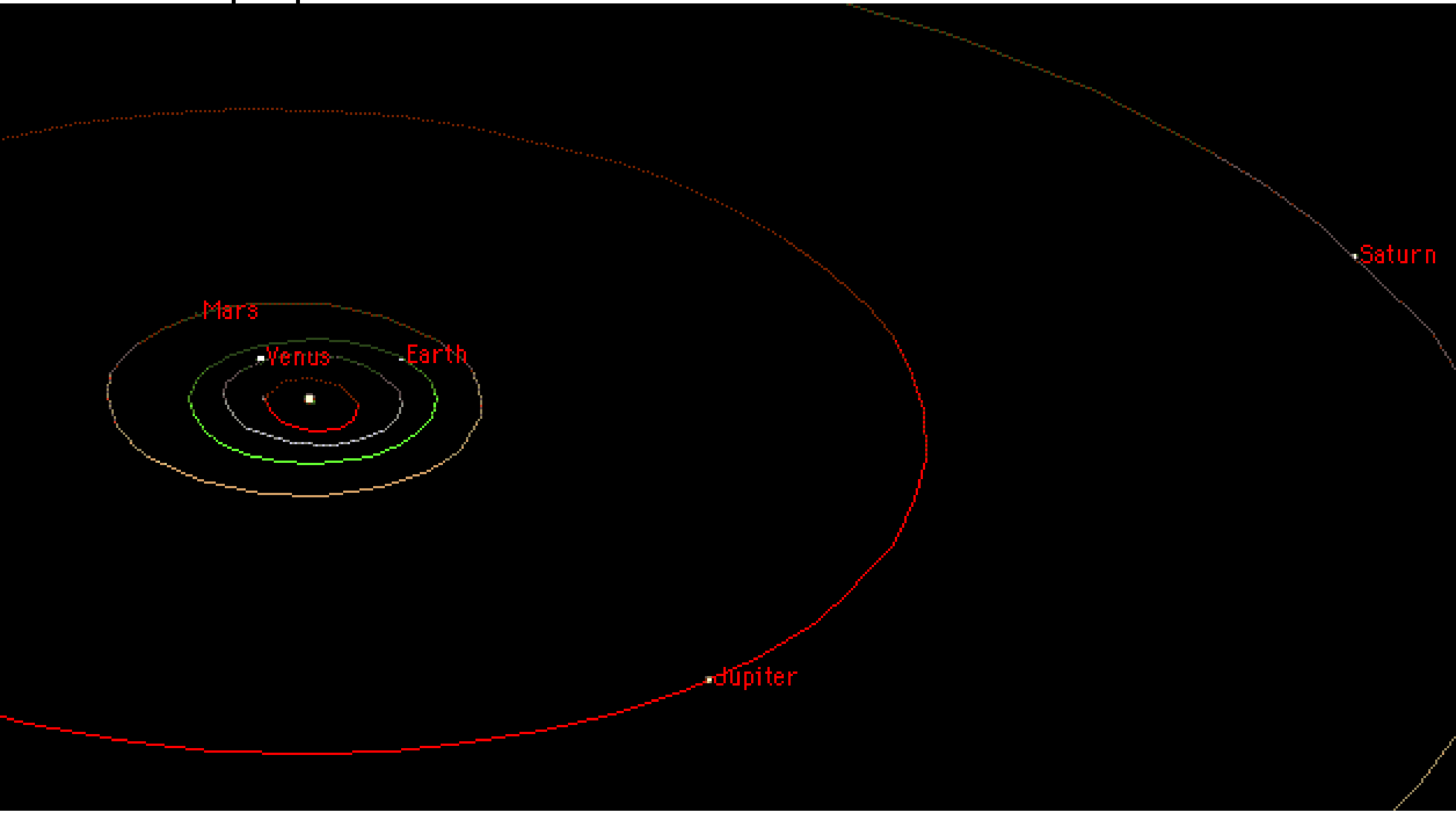
As órbitas dos planetas do sistema solar são elipses com excentricidade pequena

Órbitas dos planetas externos



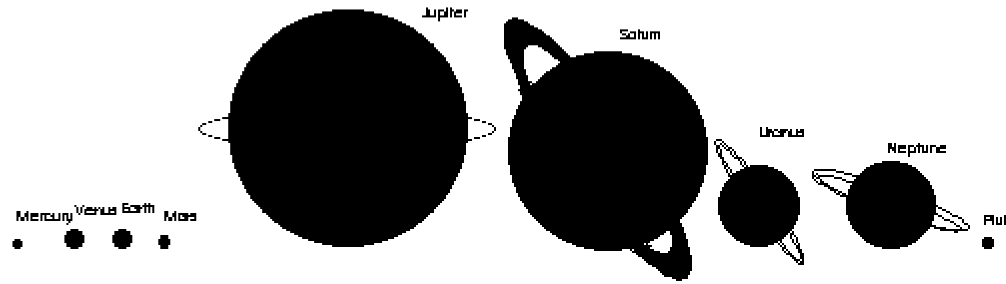
As órbitas dos planetas do sistema solar são elipses com excentricidade pequena

Órbitas dos planetas internos



Vejamos os valores das excentricidades das órbitas

Charting the Planets

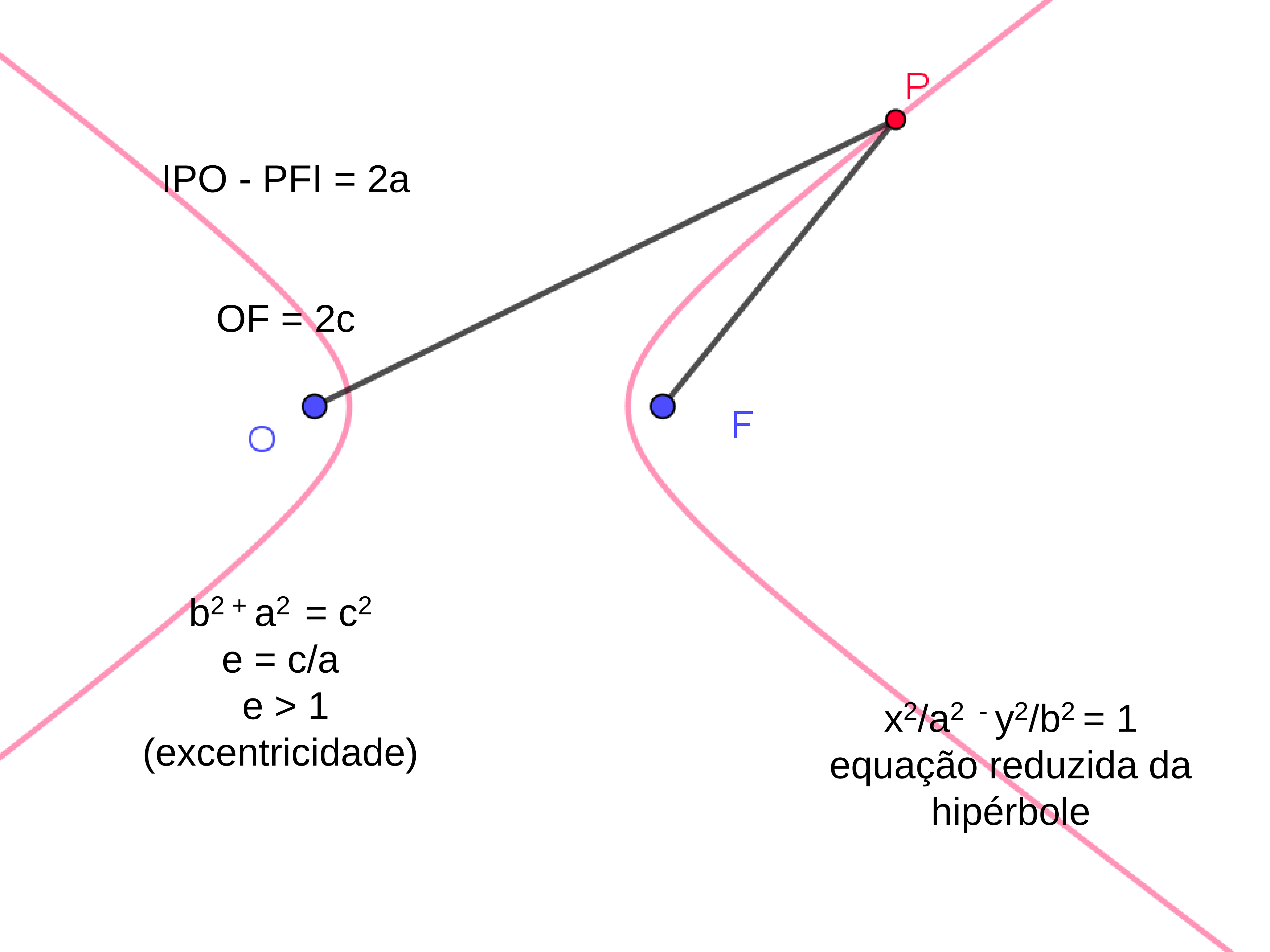


Categories	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune	Pluto
1. Mean Distance From Sun (Millions of Kilometers)	57.9	108.2	149.6	227.9	778.3	1,427	2,871	4,497	5,914
2. Period of Revolution	88 days	224.7 days	365.3 days	687 days	11.86 years	29.46 years	84 years	165 years	248 years
3. Equatorial Diameter (Kilometers)	4,880	12,100	12,756	6,794	143,200	120,000	51,800	49,528	~2,330
4. Atmosphere (Main Components)	Virtually None	Carbon Dioxide	Nitrogen Oxygen	Carbon Dioxide	Hydrogen Helium	Hydrogen Helium	Helium Hydrogen Methane	Hydrogen Helium Methane	Methane + ?
5. Moons	0	0	1	2	16	18	15	8	1
6. Rings	0	0	0	0	3	1,000 (?)	11	4	0
7. Inclination of Orbit to Ecliptic	7∞	3.4∞	0∞	1.9∞	1.3∞	2.5∞	0.8∞	1.8∞	17.1∞
8. Eccentricity of Orbit	.206	.007	.017	.093	.048	.056	.046	.009	.248
9. Rotation Period	59 days	243 days Retrograde	23 hours 56 min.	24 hours 37 min.	9 hours 55 min.	10 hours 40 min.	17.2 hours Retrograde	16 hours 7 min.	6 days 9 hours 18 min. Retrograde
10. Inclination of Axis*	Near 0∞	177.2∞	23∞ 27'	25∞ 12'	3∞ 5'	26∞ 44'	97∞ 55'	28∞ 48'	120∞

* Inclinations greater than 90∞ imply retrograde rotation.

1/98

Categories	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune	Pluto
1. Mean Distance From Sun (Millions of Kilometers)	57.9	108.2	149.6	227.9	778.3	1,427	2,871	4,497	5,914
2. Period of Revolution	88 days	224.7 days	365.3 days	687 days	11.86 years	29.46 years	84 years	165 years	248 years
3. Equatorial Diameter (Kilometers)	4,880	12,100	12,756	6,794	143,200	120,000	51,800	49,528	~2,330
4. Atmosphere (Main Components)	Virtually None	Carbon Dioxide	Nitrogen Oxygen	Carbon Dioxide	Hydrogen Helium	Hydrogen Helium	Helium Hydrogen Methane	Hydrogen Helium Methane	Methane + ?
5. Moons	0	0	1	2	16	18	15	8	1
6. Rings	0	0	0	0	3	1,000 (?)	11	4	0
7. Inclination of Orbit to Ecliptic	7∞	3.4∞	0∞	1.9∞	1.3∞	2.5∞	0.8∞	1.8∞	17.1∞
8. Eccentricity of Orbit	.206	.007	.017	.093	.048	.056	.046	.009	.248
9. Rotation Period	59 days	243 days Retrograde	23 hours 56 min.	24 hours 37 min.	9 hours 55 min.	10 hours 40 min.	17.2 hours Retrograde	16 hours 7 min.	6 days 9 hours 18 min. Retrograde
10. Inclination of Axis*	Near 0∞	177.2∞	23∞ 27'	25∞ 12'	3∞ 5'	26∞ 44'	97∞ 55'	28∞ 48'	120∞


P
IPO - PFI = 2a
OF = 2c
O
F
$b^2 + a^2 = c^2$
e = c/a
e > 1
(excentricidade)
$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
equação reduzida da hipérbole