Um pouco da História da Álgebra parte 2

Antonio Carlos Brolezzi

François Viète (1540 - 1603)

O caso irredutível da cúbica, em que a fórmula de Cardano leva a uma raiz quadrada de número negativo, foi resolvido por Rafael Bombelli em 1572.

250 anos se passaram sem que ninguém conseguisse resolver a quíntica, embora muitos matemáticos tenham tentado, como Viète, Harriot, Tschirnhaus, Euler, Bezout e Descartes.

Ruffini, um médico e padre italiano, foi o primeiro a propor uma demonstração de que a equação geral do quinto grau não podia ser resolvida por radicais.

Mas seu tratado de 1798 não apresentava uma demonstração satisfatória.

Paolo Ruffini (1765-1822)

Um jovem matemático norueguês, Abel, apresentou uma prova completa da impossibilidade da solução da quíntica por radicais.

Sua demonstração envolvia aplicar resultados de permutações sobre o conjunto das raízes da equação.

Niels Henrik Abel
(1802-1829)

Abel era de família muito pobre. Tudo parecia que iria mudar quando, em sua escola, o professor de matemática foi mandado embora após ter castigado um aluno até a morte.
O novo professor ficou entusiasmado com o garoto. Mas seu pai morreu e deixou a família na miséria.
Seu professor vez então uma coleta para ajuntar dinheiro para que ele fizesse a universidade. Ele graduou-se em 1822.

Niels Henrik Abel
(1802-1829)

Outro professor da Universidade tomou conta de Abel, que tinha uma péssima saúde. Abel não conseguia emprego, e endividou-se muito viajando para visitar matemáticos e chegando a pagar para imprimir artigos. Quando Abel finalmente conseguiu um emprego em uma Universidade, não chegou a ler a carta com a boa notícia, pois tinha morrido 3 dias antes, com 27 anos.

Abel pesquisou dois problemas:

1. Encontrar todas as equações de grau qualquer que são solúveis algebricamente.

2. Decidir se uma equação dada é soluvel algebricamente ou não.

Embora não tenha resolvido esses problemas em vida, Abel obteve um resultado particularmente interessante, trabalhando sobre os estudos de Gauss.

Gauss (1777-1855)

Abel generalizou uma solução de Gauss para uma equação na qual todas as raízes são expressas como potência de uma delas, trabalhando com a ideia da permutação.

Devido a esse resultado que os grupos comutativos são chamados hoje como grupos abelianos.

Evariste Galois
(1811-1832)

Abel não pode terminar seu programa, mas sua tarefa foi levada adiante por outro jovem de vida curta, Galois.

Suas idéias sobre a solução de equações algébricas por radicais foram apresentadas em um manuscrito submetido à Academia Francesa em 1829 (ele tinha 17 anos).

Evariste Galois
(1811-1832)

Galois estudou em casa com sua mãe até aos 12 anos. Quando entrou na escola, repetiu de ano.
Quando tinha 16 anos descobriu a matemática com um professor que era o único que escrevia boas coisas sobre ele no boletim.
Com 17 anos Galois prestou vestibular na Escola Politécnica mas não passou.

Evariste Galois (1811-1832)

Voltou a prestar o vestibular mas seu pai havia se suicidado dias antes e ele não passou de novo.
Entrou então na Escola Normal.
Foi expulso por publicar uma crítica ao diretor no jornal da escola.
Entrou para o exército, mas foi preso duas vezes por envolvimento em política.

Vítima de cólera, ficou internado e apaixonou-se pela filha do médico, Stephanie.

Escrevia seu nome diversas vezes nas margens de seus manuscritos.

Retrato de Elizabeth Vigée Le Brun, pintora francesa (1755-1842)

Naquele seu primeiro manuscrito, Galois começa por clarificar a ideia de racionalidade.

Uma vez que uma equação tenha coeficientes em um certo domínio, por exemplo no conjunto dos números racionais,
então dizer que uma equação é solúvel por radicais significa que pode-se expressar qualquer raiz usando as quatro operações básicas e a extração de raízes, todas aplicadas aos elementos do domínio original.

MÉMOIRE

SUR LES

CONDITIONS DE RÉSOLUBILITÉ DES ÉQUATIONS PAR RADICAUX (¹).

Le Mémoire ci-joint (²) est extrait d'un Ouvrage que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie il y a un an. Cet Ouvrage n'ayant pas été compris, les propositions qu'il renferme ayant été révoquées en doute, j'ai dû me contenter de donner, sous forme synthétique, les principes généraux et une *seule* application de ma théorie. Je supplie mes juges de lire du moins avec attention ce peu de pages.

On trouvera ici une *condition* générale à laquelle *satisfait toute équation soluble par radicaux,* et qui réciproquement assure leur résolubilité. On en fait l'application seulement aux

---

(¹) Ce Mémoire et le suivant ont été retrouvés dans les papiers de Galois et publiés pour la première fois en 1846 par Liouville, qui les avait fait précéder de la note suivante :

« En insérant dans leur Recueil la lettre qu'on vient de lire, les éditeurs de la *Revue encyclopédique* annonçaient qu'ils publieraient prochainement les manuscrits laissés par Galois. Mais cette promesse n'a pas été tenue. M. Auguste Chevalier avait cependant préparé le travail. Il nous a remis et l'on trouvera dans les feuilles qui vont suivre :

« 1° Un Mémoire entier sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, avec l'application aux équations de degré premier;

« 2° Un fragment d'un second Mémoire où Galois traite de la théorie générale des équations qu'il nomme *primitives*.

« Nous avons conservé la plupart des notes que M. Auguste Chevalier avait jointes aux Mémoires dont nous venons de parler. Ces notes sont toutes marquées des initiales A. Ch. Les notes non signées sont de Galois lui-même.

« Nous compléterons cette publication par quelques autres morceaux extraits des papiers de Galois, et qui, sans avoir une grande importance, pourront cependant encore être lus avec intérêt par les géomètres. »

Les extraits dont parle Liouville dans la dernière phrase de cette note n'ont jamais été publiés.

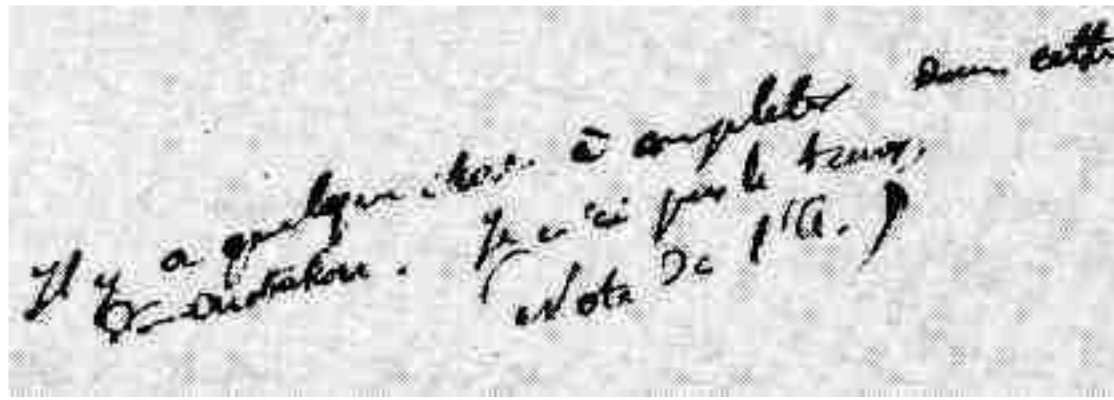
(²) J'ai jugé convenable de placer en tête de ce Mémoire la préface qu'on va lire, bien que je l'aie trouvée biffée dans le manuscrit. (A. Ch.)

“Seja uma equação dada na qual *a*, *b*, *c*, ... Sejam as *m* raízes (Galois assume que esta equação é irredutível e que todas as raízes são distintas.) Sempre haverá um grupo de permutações das letras *a*, *b*, *c*, ... Que possui a seguinte propriedade: 1. Que toda função das raízes, invariável sob as permutações do grupo , é conhecida racionalmente; 2. Por outro lado, que toda função das raízes, racionalmente conhecida, é invariante sob as permutações.”

Galois chamou este grupo de permutações de **grupo da equação**.

Os biógrafos de Galois tem relatado uma vida trágica e aventuresca. De fato, Galois morreu muito jovem, com menos de 21 anos, vitima de um tiro no estômago como conseqüência de um duelo com Pescheux d'Herbinville.

Galois foi encontrado sozinho por um camponês e levado ao Hospital Cochin, onde morreu no dia seguinte nos braços de seu irmão Alfred.



Na noite anterior ao duelo, Galois escreveu diversas cartas. O nome de Stephanie aparece de novo.

Em uma carta a seu amigo Chevalier, ele descreve e elucida sua teoria. Mas não é verdade que tenha criado a ***teoria dos grupos*** na madrugada, véspera de sua morte, como Bell e outros biógrafos insistem em colocar. Ele usa o termo ***grupo*** no sentido de ***grupo de permutações*** em todos seus escritos desde que tinha 17 anos.

O que é certo é que Galois teve sua teoria rejeitada muitas vezes.

Seu primeiro manuscrito de 1829 submetido à Academia Francesa foi rejeitado por Cauchy (1789-1857).

Os biógrafos dizem que Cauchy desprezou o artigo, que o perdeu etc.

Mas René Taton descobriu evidências do contrário, de que Cauchy sugeriu que Galois retirasse o artigo e o submetesse ao Grand Prix.

Galois realmente submeteu sua teoria melhorada em março de 1830. Fourier recebeu seu trabalho mas morreu pouco depois, e o artigo de Galois foi perdido. O prêmio foi dado a Abel (postumamente) e Jacobi em Julho de 1830.

Fourier (1768 - 1830)

Poisson (1781 - 1840)

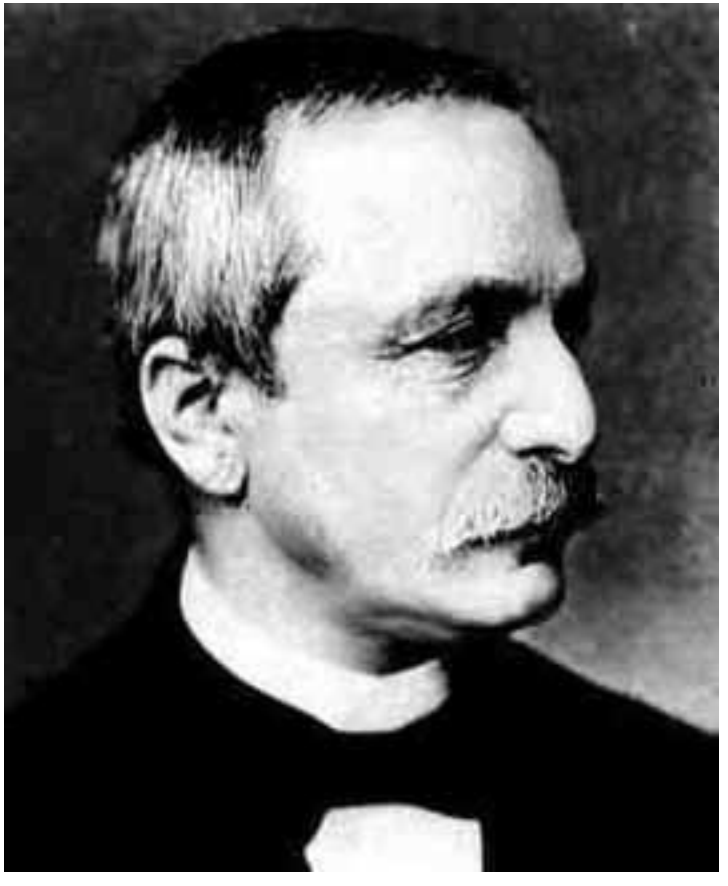
Poisson convidou Galois a submeter uma terceira versão de sua teoria de equações à Academia e ele assim fez em 17 de janeiro de 1831.
Poisson não entendeu o artigo e solicitou que o melhorasse.
Ocorre que a noção de grupo ainda não estava estabelecida, por isso Poisson não entendeu o artigo.

Cauchy publicou uma definição de grupo em 1845. Um ano depois Liouville publicou algumas notas que Galois havia feito em seus artigos na noite anterior ao duelo, onde se lia: *"... se em tal grupo temos as substituições S e T então temos a substituição ST*."

Ora, teria Cauchy recebido influência de Galois, sem fazer referência a ele? Ou teria ele sido influenciado diretamente por Ruffini?

Liouville (1809 - 1882)

Seja como for, o certo é que Cauchy segue a linha de definir grupos apenas com relação à permutação. Kronecker e Weber seguem essa linha.



Kronecker (1823 - 1891)

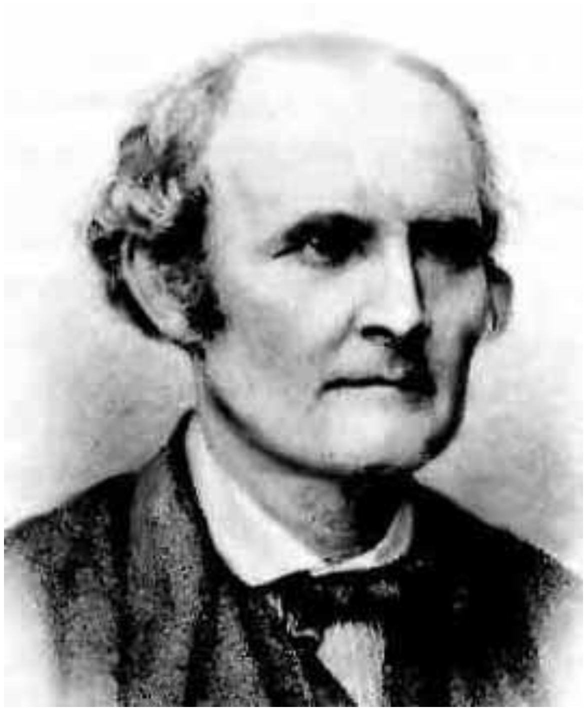
Weber (1842 - 1913)

Essa elaboração culmina com Frobenius e Hölder.

Frobenius (1849 - 1917)

Hölder (1859 - 1937)

Por outro lado, Cayley escreveu um artigo sobre grupos em 1854 em que deu uma definição mais abstrata de grupo. Essa idéia foi seguida por Dick e Burnside.



Cayley (1821 - 1895)

Dick (1856 - 1934)

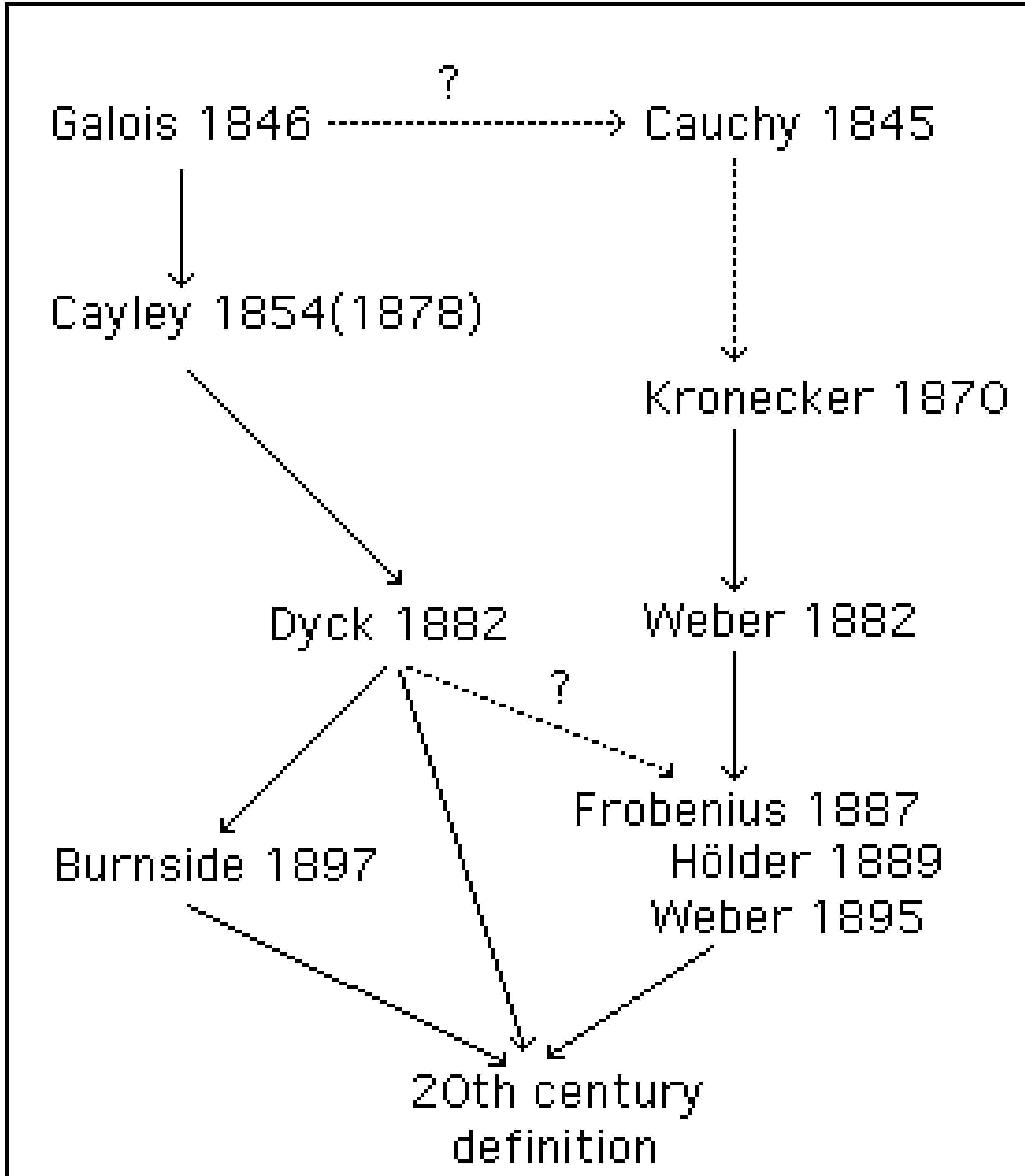
Burnside (1852 - 1927)

Ambas as linhas culminam no século XX com Emmy Noether, principalmente através do seu aluno Van der Waerden.

Emmy Noether (1882 - 1935)

Van der Waerden (1903 - 1996)

Esse é o diagrama das interações entre os vários matemáticos até a definição abstrata de grupo (elaborado por Peter Neumann em um conferência 19 de março de 2001 na Universidade de Sussex)



O uso ainda indefinido da palavra grupo por Galois pode explicar a dificuldade de compreensão de seus resultados em sua época. Mas a noção de grupo se tornará importantíssima para expressar sua própria teoria mais tarde.

Essa moderna definição de grupo, chave para entender a Teoria de Galois, somente será desenvolvida no final do século XIX e a Teoria de Grupos se tornará um dos principais resultados da matemática do século XX.

Creio que estudar a História de Galois ajuda a entender um pouco da natureza da Matemática e também da História da Matemática.

A História da Teoria de Galois mostra que a Matemática é construída com muito estudo, erros, pequenos acertos e a cooperação é fundamental.