Probabilidade

Fenômenos aleatórios

O estudo das probabilidades surgiu do interesse humano em analisar os **fenômenos (ou experimentos) aleatórios**, que são aqueles que, quando executados diversas vezes, nas mesmas condições, podem apresentar resultados diferentes. Por exemplo, se você jogar um dado duas vezes da mesma forma sobre uma superfície plana, podem sair dois números diferentes ou o mesmo número duas vezes – isso é um fenômeno aleatório. O pensamento probabilístico permite estudar matematicamente esse fenômeno.

Sob determinadas condições, é possível prever com exatidão a chance de algo acontecer ou não. Podemos dizer que, ao jogar um dado de seis faces sobre uma superfície plana, como o tampo de uma mesa, uma das faces ficará voltada para cima. Não sabemos qual delas, mas é certo que será uma das seis faces possíveis. O estudo das probabilidades permite determinar todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, que é aquele que apresenta resultados imprevisíveis dentro de uma gama de possibilidades. Ao lançarmos um dado, pode sair um dos seis números. Ao retirarmos uma carta de um baralho de 52 cartas, uma delas sairá com certeza.

A teoria das probabilidades nos leva, então, a estudar quais são todas as possibilidades de resultados dentro de experimentos aleatórios. Como já dissemos, você pode jogar um dado e não saber que número sairá, mas sabe que somente poderá ser um dos números escritos em uma das seis faces do dado (no caso de ele ser cúbico). Ou seja, o conjunto de resultados possíveis ao se jogar esse dado é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mas se o dado for de outro formato, como os dados que possuem 10 lados, o conjunto de resultados possíveis é diferente, isto é, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Conhecer bem esse conjunto é o primeiro passo para estudar as probabilidades.

Cálculo de probabilidade

A palavra **probabilidade** vem do latim *probare*, que significa "provar" ou "testar", e por isso é utilizada para se referir à chance que um evento tem de acontecer, entre todas as possibilidades de ocorrência. Na linguagem comum, utilizamos a palavra probabilidade para nos referirmos à perspectiva favorável de algo acontecer, como sinônimo de chance. Qual a probabilidade, ou qual a chance, de que algo venha a acontecer com certo grau de segurança? Na Matemática, probabilidade é uma quantificação que mede isso, o quão provável é que um determinado evento aconteça, dentro de um espaço amostral que indica todas as possibilidades. Por **evento** entende-se um subconjunto do espaço amostral. O espaço amostral de um dado de seis faces é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Um evento A, por exemplo, seria tirar um número par. Então, $A = \{2, 4, 6\}$.

Por exemplo, se quisermos saber qual é a probabilidade de sair um número par ao se jogar um dado, o evento considerado é o conjunto $A = \{2, 4, 6\}$. Devemos considerar, então, o número de elementos do espaço amostral e o número de elementos do evento em questão. Seja $n(A)$ o número de elementos do conjunto A, que no exemplo do dado é 3, e $n(S)$ o número de elementos do conjunto S, que no caso é 6. Então, a probabilidade de sair um número par ao jogarmos um dado é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Para representar valores de probabilidades, podemos também usar números decimais ou porcentagens. Assim, a probabilidade de sair um número par ao jogar um dado também pode ser indicada como 0,5 ou 50%.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral. Neste livro consideramos apenas espaços amostrais finitos.

Seja S um espaço amostral finito não vazio de eventos aleatórios equiprováveis, isto é, todos os elementos de S têm a mesma chance de ocorrerem. Seja A um evento, que é um subconjunto de S. Então, a probabilidade de ocorrer o evento A é dada pela razão entre o número de elementos de A, $n(A)$, e o número de elementos de S, $n(S)$, o que pode ser representado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Evento certo, evento impossível e eventos complementares

Em espaços amostrais finitos, **eventos impossíveis** de acontecer têm probabilidade zero (0). Eventos que certamente ocorrerão são chamados de **eventos certos** e têm probabilidade 1, ou 100%. Um exemplo de evento certo é aquele que é igual ao espaço amostral. Veja ao lado.

$$\boxed{P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1}$$

E qual é a probabilidade de um evento não ocorrer?

Por exemplo, se jogarmos um dado, qual é a probabilidade de não sair o número 6? Para não sair o 6, basta considerarmos que os casos favoráveis são os elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5} e a probabilidade pedida é $\frac{5}{6}$. Vamos aproveitar essa situação para conhecer o conceito de evento complementar.

Seja A um evento pertencente a um espaço amostral S. O evento $\overline{A}$, complementar de A, é um subconjunto de S que contém todos os elementos de S que não pertencem a A e somente esses elementos.

Então $n(A) + n(\overline{A}) = n(S)$. Assim:

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(S)} = \frac{n(S) - n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} - \frac{n(A)}{n(S)} = 1 - P(A)$$

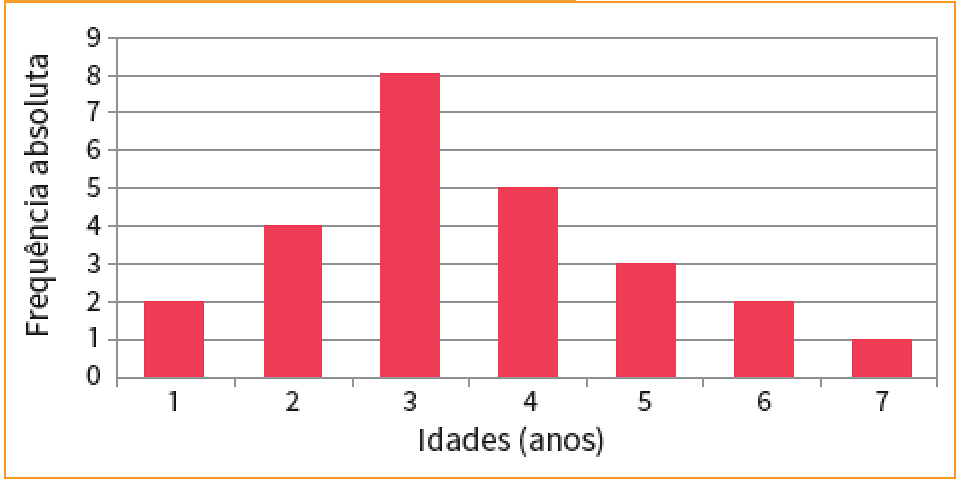
Ou seja, a probabilidade de não ocorrer um evento é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer.

Vamos, então, calcular a probabilidade de não sair 6 no lançamento de um dado. Considerando $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A = \{6\}$, temos:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

27. Observe o gráfico sobre as idades das crianças que frequentaram uma clínica pediátrica num determinado período.

Crianças atendidas por idade (*f*)



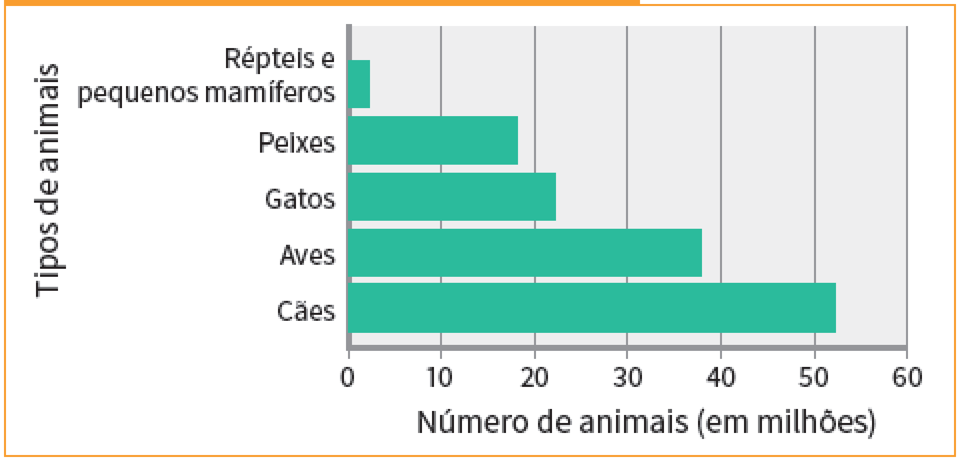
Fonte: Dados fictícios.

Sorteando-se uma criança ao acaso, qual é a probabilidade de que ela tenha 5 anos ou menos?

27. Número de elementos do espaço amostral: 25.
Número de elementos do evento *A* considerado: 22.
$P(A) = \frac{22}{25} = 0{,}88 = 88\%$

28. Com base no gráfico a seguir, se Evelin é brasileira e diz que tem um animal de estimação, e se não temos mais nenhuma informação a respeito, qual é aproximadamente a probabilidade de o animal ser um cão?

Animais domésticos no Brasil (2013)



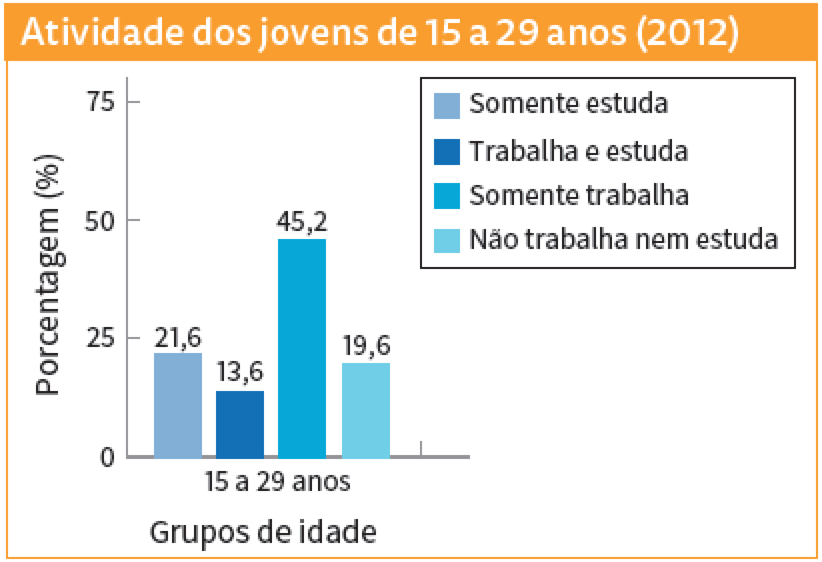
Fonte: IBGE. Disponível em: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/file/camaras_tematicas/Insumos_agropecuarios/79RO/IBGE_PAEB.pdf>. Acesso em: 6 jan. 2016.

28. Número de elementos do espaço amostral (em milhões):
$2 + 18 + 22 + 38 + 52 = 132$.

Número de elementos do evento B considerado: 52 milhões.

$$P(B) = \frac{52}{132} \simeq 0{,}394 = 39{,}4\%$$

29. Se um jovem brasileiro fosse escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ele não trabalhasse no ano considerado no gráfico a seguir?



Fonte: IBGE. Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 2012. Disponível em: <http://noticias.uol.com.br/cotidiano/ultimas-noticias/2013/11/29/um-em-cada-cinco-jovens-de-15-a-29-anos-nao-estuda-nem-trabalha-diz-ibge.htm>. Acesso em: 6 jan. 2016.

29. $P = 21{,}6\% + 19{,}6\% = 41{,}2\%$

32. Ao sortearmos um número de 1 a 100, qual é a probabilidade de o número sorteado ser:

a) par?

b) múltiplo de 5?

c) divisor de 100?

d) maior do que 10 e menor do que 50?

e) primo?

32. O espaço amostral tem 100 elementos.

a) Número de elementos do evento par: 50

$$P(A) = \frac{5}{100} = 50\%$$

b) Número de elementos do evento múltiplo de 5: 20

$$P(B) = \frac{20}{100} = 20\%$$

c) Número de elementos do evento divisor de 100: 9

$$P(C) = \frac{9}{100} = 9\%$$

d) Número de elementos do evento maior do que 10 e menor do que 50: 39

$$P(D) = \frac{30}{100} = 39\%$$

e) Número de elementos do evento primo: 25

$$P(E) = \frac{25}{100} = 25\%$$

33. (Unicamp-SP-2014-Adaptado) Um caixa eletrônico de certo banco dispõe apenas de cédulas de 20 e 50 reais. Vamos supor que a combinação entre as notas, quando um saque é realizado, seja feita de forma aleatória e equiprovável. No caso de um saque de 400 reais, a probabilidade de o número de cédulas entregues ser ímpar é igual a:

a) $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{2}{5}$.

c) $\frac{2}{3}$.

d) $\frac{3}{5}$.

33. Sejam x o número de cédulas de R$ 20,00 e y o número de cédulas de R$ 50,00.

Então, $20x + 50y = 400$.

As soluções dessa equação são: (0, 8); (5, 6); (10, 4); (15, 2); (20, 0).

As soluções em que o número de cédulas é ímpar são (5, 6) e (15, 2).

Supondo que cada uma das soluções tem a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de o número de cédulas entregues ser ímpar é igual a $\frac{2}{5}$.

Resposta: alternativa **b**.

34. (Fuvest-SP-2014) O gamão é um jogo de tabuleiro muito antigo, para dois oponentes, que combina a sorte, em lances de dados, com estratégia, no movimento das peças. Pelas regras adotadas, atualmente, no Brasil, o número total de casas que as peças de um jogador podem avançar, numa dada jogada, é determinado pelo resultado do lançamento de dois dados. Esse número é igual à soma dos valores obtidos nos dois dados, se esses valores forem diferentes entre si; e é igual ao dobro da soma, se os valores obtidos nos dois dados forem iguais. Supondo que os dados não sejam viciados, a probabilidade de um jogador poder fazer suas peças andarem pelo menos oito casas em uma jogada é:

a) $\frac{1}{3}$.
b) $\frac{5}{12}$.
c) $\frac{17}{36}$.
d) $\frac{1}{2}$.
e) $\frac{19}{36}$.

34. O número de eventos possíveis nas jogadas de dois dados é: $n(E) = 6 \cdot 6 = 36$.

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Desses eventos, os que satisfazem às condições e que determinam que o jogador avance com suas peças, em uma jogada, pelo menos oito casas, são:

$A = \{(2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Então, $n(A) = 17$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{n(A)}{n(E)} = \frac{17}{36}$.

Resposta: alternativa **c**.

37. (Enem-2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$. b) $\frac{19}{100}$. c) $\frac{20}{100}$. d) $\frac{21}{100}$. e) $\frac{80}{100}$.

37. $n(A) = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$: 20 favoráveis

$n(S) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$: 100 (total)

$$P = \frac{20}{100}$$

Resposta: alternativa **c**.