

# Porcentagem

(Enem-2014) Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem  $P$  da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de  $P$  é:

- (A) [35;63]
- (B) [40;63]
- (C) [50;70]
- (D) [50;90]
- (E) [70;90]

(FUVEST 2020) Se, em 15 anos, o salário mínimo teve um aumento nominal de 300% e a inflação foi de 100%, é correto afirmar que o aumento real do salário mínimo, nesse período, foi de

- (A) 50%.
- (B) 100%.
- (C) 150%.
- (D) 200%.
- (E) 250%.

(Fuvest-SP-2001) Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou pela mesma. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria:

a) 40%.

c) 50%.

e) 60%.

b) 45%.

d) 55%.

(Enem-2013) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão-fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão-fidelidade da loja. Caso esse cliente possuísse o cartão, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

- (A) 15,00
- (B) 14,00
- (C) 10,00
- (D) 5,00
- (E) 4,00

## Juros

**Juro** é a remuneração do capital empregado ou a remuneração cobrada pelo empréstimo de dinheiro. Se aplicarmos um valor (que chamamos de **capital**) durante um determinado período de tempo, ao fim do prazo esse valor irá aumentar. O valor final é chamado **montante**, e o aumento é o juro.

## Juros simples

São chamados **juros simples** os valores obtidos na situação em que, ao longo do tempo, apenas o capital inicial rende ganho. Se utilizarmos as letras  $C$  para capital,  $M$  para montante e  $j$  para juro, teremos:

$$j = M - C$$

É importante perceber que os juros são, em geral, expressos em valor monetário. Por exemplo, se um capital de R\$ 100,00 for investido por um período e resultar em um montante de R\$ 102,00, os R\$ 2,00 de diferença são o juro. Já a taxa de juros é em geral expressa em porcentagem. No caso, a taxa de juros seria  $\frac{2}{100} = 2\%$ .

Se esse capital fosse mantido nesse investimento por dois períodos consecutivos, e os mesmos juros simples fossem computados novamente, teríamos de multiplicar o total de juros por 2, que seria, então, de R\$ 4,00. Chamando de  $i$  a taxa de juros e de  $t$  o número de períodos em que os juros são calculados, temos:

$$j = C \cdot i \cdot t$$

Nesse mesmo exemplo, se fôssemos calcular os juros que essa aplicação renderia em 6 meses, teríamos de fazer:

$$j = 100 \cdot 2\% \cdot 6 = 100 \cdot \frac{2}{100} \cdot 6 = 12 \text{ reais}$$



## ■ Juros compostos

Os juros compostos são os juros comumente praticados no mundo das finanças. Se na situação que você estiver analisando, seja em problemas de Matemática, seja em situações da vida prática, não for mencionado explicitamente que se trata de juros simples, então você deve entender que se trata de juros compostos, já que eles são os mais utilizados na prática. Nesse tipo de juros, após cada período de tempo a que se refere a taxa contratada, os juros ganhos são somados ao capital (ou seja, são capitalizados) e, no novo período, os juros somados incidem sobre esse montante.

Podemos dizer que os juros compostos são composições de juros simples aplicados em cada período. Ou seja, se for feita uma aplicação em um único período, juros simples e compostos rendem a mesma quantia. Mas se houver mais de um período, enquanto os juros simples continuam sendo calculados sobre o capital inicial, os juros compostos são calculados sobre o montante do final do primeiro período. São os chamados “juros sobre juros”.

Para visualizar isso, observe a sequência de valores dos dois regimes de juros, o simples e o composto, para um capital inicial de R\$ 100,00, uma taxa de juros de 2% ao mês e um período de 12 meses. Note que, nesse exemplo, o capital é depositado apenas uma vez, rendendo juros após o primeiro mês de aplicação. Ao final do período, teremos o montante, que corresponde a esse capital inicialmente depositado somado aos juros que foram incorporados.

	Regime de juros simples		Regime de juros compostos	
Mês	Montante (em reais)	O que foi feito	Montante (em reais)	O que foi feito
	100,00	C	100,00	C
1	102,00	$M_1 = C(1 + i)$	102,00	$M_1 = C(1 + i)$
2	104,00	$M_2 = C(1 + 2i)$	104,04	$M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	106,00	$M_3 = C(1 + 3i)$	106,12	$M_3 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^3$
4	108,00	$M_4 = C(1 + 4i)$	108,24	$M_4 = M_3(1 + i) = C(1 + i)^4$
5	110,00	$M_5 = C(1 + 5i)$	110,41	$M_5 = M_4(1 + i) = C(1 + i)^5$
6	112,00	$M_6 = C(1 + 6i)$	112,62	$M_6 = M_5(1 + i) = C(1 + i)^6$
7	114,00	$M_7 = C(1 + 7i)$	114,87	$M_7 = M_6(1 + i) = C(1 + i)^7$
8	116,00	$M_8 = C(1 + 8i)$	117,17	$M_8 = M_7(1 + i) = C(1 + i)^8$
9	118,00	$M_9 = C(1 + 9i)$	119,51	$M_9 = M_8(1 + i) = C(1 + i)^9$
10	120,00	$M_{10} = C(1 + 10i)$	121,90	$M_{10} = M_9(1 + i) = C(1 + i)^{10}$
11	122,00	$M_{11} = C(1 + 11i)$	124,34	$M_{11} = M_{10}(1 + i) = C(1 + i)^{11}$
12	124,00	$M_{12} = C(1 + 12i)$	126,82	$M_{12} = M_{11}(1 + i) = C(1 + i)^{12}$

A diferença entre juros simples e compostos pode parecer pequena, mas ela se acentua cada vez mais.

- com juros simples:

$$M_{48} = C(1 + 48i) = 100(1 + 48 \cdot 2\%) = 100(1 + 96\%) = 196$$

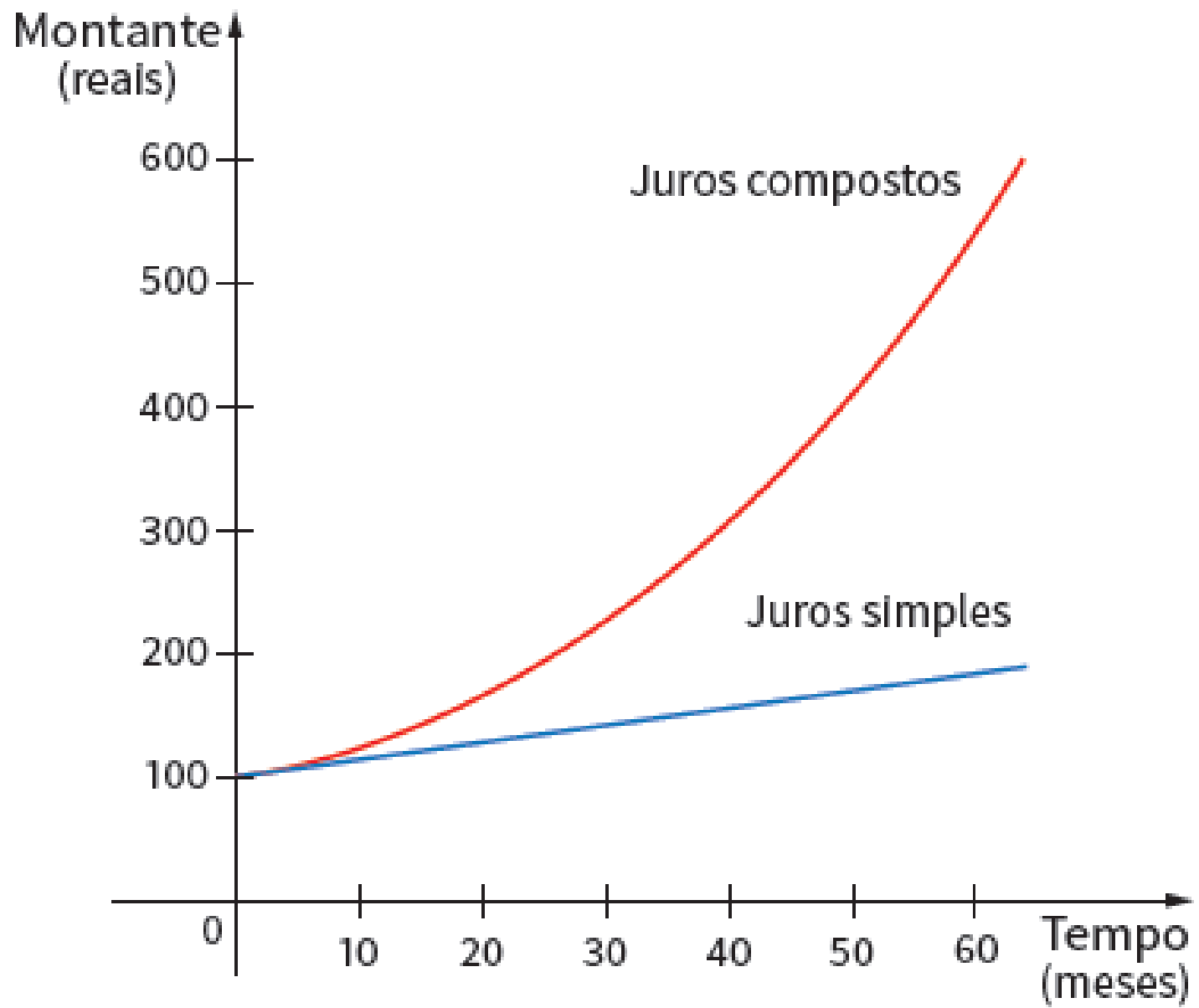
- com juros compostos:

$$M_{48} = C(1 + i)^{48} = 100(1 + 2\%)^{48} = 258,70$$

Nos juros compostos, o montante final  $M$  está relacionado ao capital  $C$ , aos juros  $j$ , à taxa de juros  $i$  e ao número de períodos  $t$  pelas fórmulas:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$j = M - C$$



# Juros simples x juros compostos

# Juros simples x juros compostos

São chamados juros simples os valores obtidos na situação em que, ao longo do tempo, apenas o capital inicial rende ganho. Se utilizarmos as letras  $C$  para capital,  $M$  para montante,  $j$  para juro,  $t$  para o número de períodos e  $i$  para a taxa de juros, teremos:

$$M = C(1 + it)$$

$$j = C \cdot i \cdot t$$

$$j = M - C$$



# Juros simples x juros compostos

Já no caso dos juros compostos, após cada período de tempo, os juros ganhos são somados ao capital (ou seja, são capitalizados) e, no novo período, os novos juros incidem sobre esse montante, de modo que:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$j = M - C$$

# Juros simples × juros compostos

Mas por que foram cobrados juros simples? Em casos como os de taxas de condomínio ou de contas de energia elétrica ou de água, em que os atrasos no pagamento geralmente são menores do que uma unidade de tempo (no caso, o mês), costuma-se cobrar juros simples. Isso porque os juros simples superam os juros compostos para períodos de tempo inferiores a uma unidade de tempo, se ambos forem calculados à mesma taxa nessa unidade temporal.

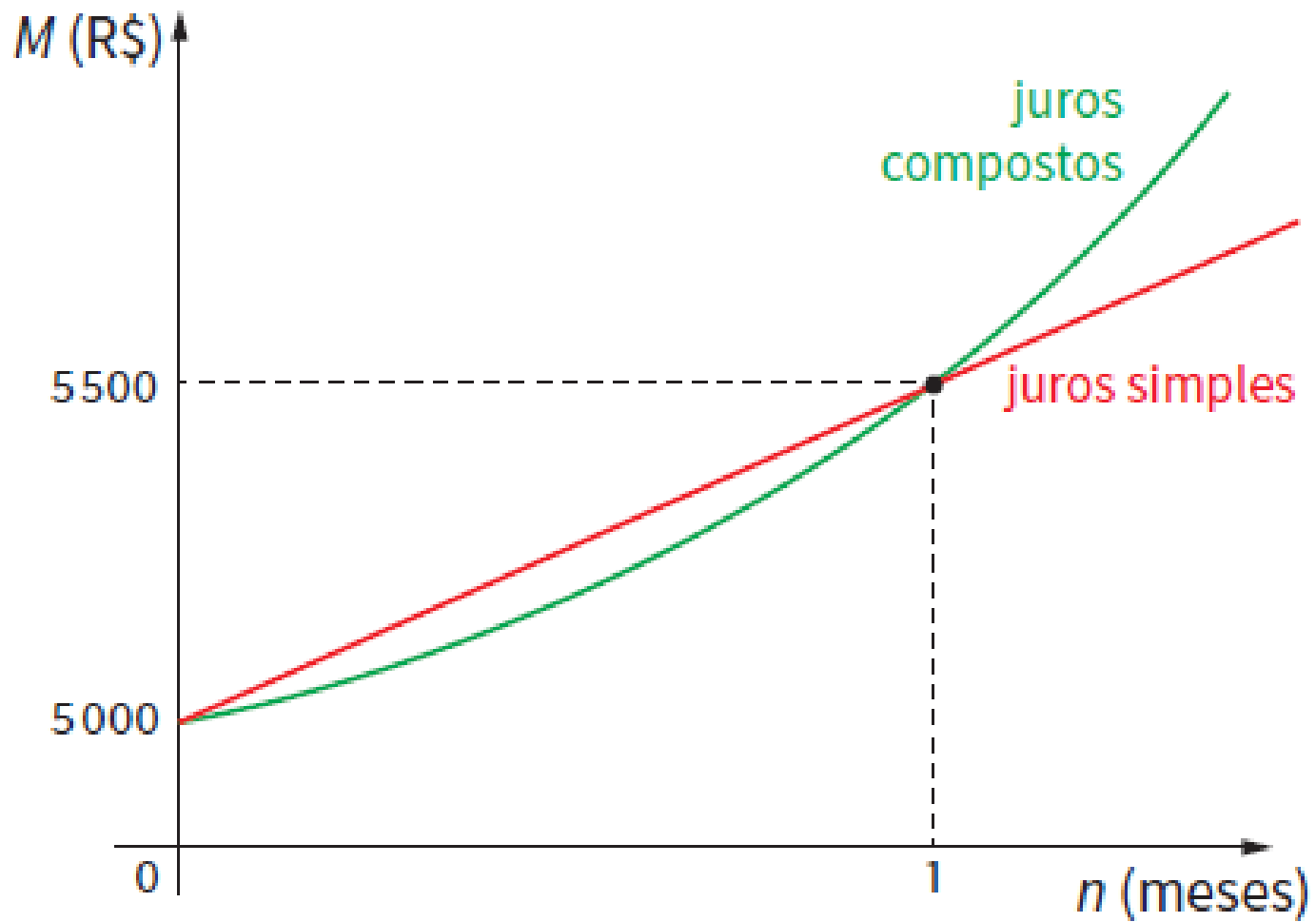
Vamos pensar em um exemplo simples: o atraso no pagamento de uma conta de R\$ 5 000,00 em que se cobram juros de 10% a.m. Em  $n$  meses, o montante da dívida será calculado da seguinte forma:

- no caso de juros simples, pela função afim:

$$M = 5000(1 + 0,1 \cdot n)$$

- no caso de juros compostos, pela função exponencial:

$$M = 5000 \cdot (1,1)^n$$



Para valores de  $n$  entre 0 e 1, o montante a juros simples é maior que a juros compostos. Por exemplo, vamos calcular os valores do montante para  $n = 0,5$ .

- Se os juros cobrados forem simples:

$$M = 5000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 0,5) = \text{R\$ } 5250,00$$

- Se os juros cobrados forem compostos:

$$M = 5000 \cdot (1,1)^{0,5} = \text{R\$ } 5244,04$$

# Compras parceladas

Um costume arraigado em nossa sociedade é o de incentivar o endividamento das pessoas por meio da oferta de compras a prazo. É comum que os produtos sejam anunciados não pelo seu preço real, mas pelas parcelas mensais, as quais, segundo os anunciantes, são tão pequenas que não causariam grandes alterações no orçamento mensal do indivíduo. Os números apresentados nas propagandas são os das parcelas e costumam ser expostos de modo a chamar mais a atenção do que os números que expressam o preço à vista, que passa a ser um dado secundário.

Vamos retomar nossos conhecimentos sobre PGs e calcular a relação entre a parcela paga e o montante final do produto.

Para isso, vamos lembrar o que já vimos sobre a relação entre capital e montante. **Capital** é o valor presente de alguma quantia em dinheiro. **Montante** é o valor futuro de uma quantia, alterada pela aplicação de juros.

Assim, a fórmula:

$$M = C(1 + i)^n$$

pode ser usada para fazer conversões entre o valor futuro e o valor presente de uma quantia, dependendo do tempo ( $n$ ) que ela fica aplicada à taxa de juros  $i$ . Ou, ainda, podemos usar a mesma fórmula para verificar quanto uma parcela paga em um mês  $n$  de um produto valeria hoje, se fosse paga à vista: é o cálculo do valor presente de cada parcela.



Vamos pensar em uma situação hipotética: você deseja comprar uma calça que custa R\$ 100,00, e as opções são pagamento à vista ou em uma parcela após um mês, mas, neste caso, com taxa de juros de 2% ao mês. O valor futuro da sua compra é obtido pela fórmula:

$$M = C(1 + i)^n, \text{ com } n = 1$$

Esse valor é igual a  $M = 100(1 + 2\%) = 102$ . Já para o valor presente usamos a fórmula:

$$C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

e encontramos  $C = \frac{102}{1 + 2\%} = \frac{102}{1,02} = 100$ . Ou seja, o capital é R\$ 100,00 e o montante é R\$ 102,00.

Agora suponha que você tenha a opção de comprar à vista, pagando os mesmos R\$ 100,00, ou a prazo, sem entrada, em duas parcelas mensais fixas. Chamando de  $P$  o valor dessas parcelas fixas, vamos calcular o valor presente de cada uma delas:

- a primeira parcela, daqui a um mês, tem valor presente de  $\frac{P}{1+i}$ ;
- a segunda parcela, a ser paga daqui a dois meses, tem valor presente de  $\frac{P}{(1+i)^2}$ .

A soma dos valores presentes de cada parcela é o preço à vista. Assim, temos:

$$C = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2}$$

No nosso exemplo, precisamos encontrar o valor  $P$  das parcelas, resolvendo a seguinte equação:

$$100 = \frac{P}{1 + 0,02} + \frac{P}{(1 + 0,02)^2}$$

$$100 = P \left( \frac{1}{1 + 0,02} + \frac{1}{(1 + 0,02)^2} \right)$$

$$P = \frac{100}{1,9415} = 51,50$$

Cada prestação será de R\$ 51,50, perfazendo o total de R\$ 103,00 a prazo.

Como você pode ver pelos cálculos acima, o preço da calça, se comprada a prazo, sofre alteração. Se houver juros, quanto maior o número de parcelas, maior será o valor a prazo.

E se pudéssemos pagar, nas mesmas condições, em 6 vezes? Ou em 12 vezes? Vamos pensar no caso geral em que podemos pagar em  $n$  vezes, sem entrada.

A equação que temos de resolver na incógnita  $P$  é:

$$C = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

Colocando  $P$  em evidência, temos uma soma de PG de termo inicial  $\frac{1}{1+i}$  e razão  $\frac{1}{1+i}$ :

$$C = P \left( \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

Fazendo uso da fórmula da soma de PG,  $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ , temos:

$$C = P \left( \frac{1}{1+i} \left( \frac{\left( \frac{1}{1+i} \right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right) \right)$$

$$C = P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Usando essa fórmula para obter o valor da prestação fixa  $P$ , dado o valor presente à vista do bem igual a  $C$ , temos a fórmula da compra de um produto que custa  $C$  em  $n$  prestações de  $P$ , sem entrada, com taxa de juros  $i$ :

$$P = C \left( \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right)$$

Pedro é *motoboy* e precisa comprar uma motocicleta nova. Veja o preço e as condições de pagamento da motocicleta de que Pedro gostou. Sabendo que os juros, nessa loja, são de 2% ao mês, qual é o valor de cada prestação? E qual é a diferença entre o preço à vista e o preço a prazo?



$$P = 3000 \left( \frac{0,02}{1 - (1 + 0,02)^{-24}} \right) \approx 3000 \cdot 0,05287 = 158,61$$

Então, pagando a motocicleta em 24 parcelas fixas, sem entrada, de R\$ 158,61, o total a prazo será de:

$$24 \cdot 158,61 = 3806,64$$

Logo, a diferença entre o preço à vista e o preço a prazo é de:

$$\text{R\$ } 3806,64 - \text{R\$ } 3000,00 = \text{R\$ } 806,64$$



# Calculadora do Cidadão

## Banco Central do Brasil

<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADA0/>

### Financiamento com prestações fixas

#### Simule o financiamento com prestações fixas

Nº. de meses	<input type="text"/>
Taxa de juros mensal	<input type="text"/> %
Valor da prestação (Considera-se que a 1a. prestação não seja no ato)	<input type="text"/>
Valor financiado (O valor financiado não inclui o valor da entrada)	<input type="text"/>

Metodologia

Calcular

Limpar

Voltar

Imprimir

### Metodologia do Financiamento com Prestações Fixas

Cálculo com juros compostos e capitalização mensal.

$$q_0 = \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j} p$$

Onde:

$n$  = Nº de Meses

$j$  = Taxa de Juros Mensal

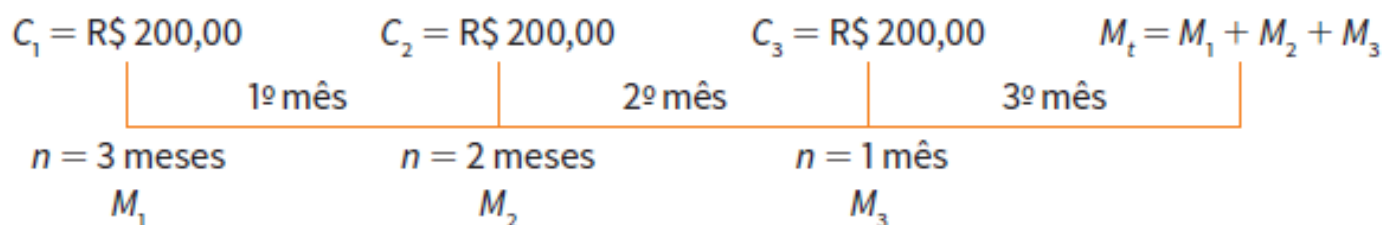
$p$  = Valor da Prestação

$q_0$  = Valor Financiado

Obs.: O cálculo da taxa de juros ( $j$ ) é feito por aproximação do Valor da Prestação ( $p$ ) com margem de erro sobre  $p$  inferior a 0.000001.

# Investimentos

Considere um investimento com depósitos mensais de R\$ 200,00, durante três meses, com juros de 2% ao mês; quanto teríamos ao final do 3º mês? Veja no diagrama abaixo a configuração desse investimento:



O primeiro depósito ( $C_1$ ) ficará investido por três meses e gerará um montante  $M_1$ ; o segundo ( $C_2$ ) ficará investido por dois meses e gerará o montante  $M_2$ ; o terceiro ( $C_3$ ) gerará o montante  $M_3$  em um mês de investimento.

Calculamos os montantes  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  relativos a cada depósito aplicando a fórmula de juros compostos,  $M = C \cdot (1 + i)^n$ , com  $n = 3, 2$  e  $1$ , respectivamente, e  $i = \frac{2}{100} = 0,02$ . Obtemos, em reais, os valores:

$$M_1 = 200(1 + 0,02)^3 = 200(1,02)^3 = 212,24$$

$$M_2 = 200(1 + 0,02)^2 = 200(1,02)^2 = 208,08$$

$$M_3 = 200(1 + 0,02)^1 = 200(1,02)^1 = 204,00$$

O montante total ou valor futuro total de um investimento desse tipo será dado pela soma da sequência:

$$M_t = M_1 + M_2 + M_3 = 212,24 + 208,08 + 204,00 = 624,32$$

Portanto, ao final dos três meses o montante será de R\$ 624,32.

Podemos calcular diretamente o montante final desse tipo de investimento aplicando uma fórmula. Se considerarmos que os depósitos serão todos iguais a  $C$ , com taxa de juros  $i$ , e sempre realizados no início de cada intervalo de tempo, o montante total,  $M_t$ , de todos os  $n$  depósitos será dado pela fórmula:

$$M_t = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n$$
$$M_t = C \cdot (1 + i)^n + C \cdot (1 + i)^{n-1} + C \cdot (1 + i)^{n-2} + \dots + C \cdot (1 + i)$$

Essa série pode ser escrita de forma crescente:

$$M_t = C \cdot (1 + i) + C \cdot (1 + i)^2 + C \cdot (1 + i)^3 + \dots + C \cdot (1 + i)^n$$

Colocando  $C$  em evidência, temos:

$$M_t = C \cdot ((1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^n)$$

Obtemos o produto de  $C$  pela soma de todos os termos da PG de termo inicial  $(1 + i)$  e razão  $(1 + i)$ . Como  $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ , temos:

$$M_t = C \cdot \left[ \frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

em que  $M_t$  é o montante total de  $n$  depósitos fixos de investimento de valor  $C$ , com taxa de juros  $i$ , por período, sendo a primeira parcela investida à vista.

No exemplo dado, três parcelas de 200 reais com taxa de juros de 2% ao mês geraram:

$$\begin{aligned}M_3 &= 200 \cdot \left[ \frac{(1 + 0,02)^{3+1} - 1}{0,02} - 1 \right] = 200 \cdot \left[ \frac{(1,02)^4 - 1}{0,02} - 1 \right] = 200 \cdot \left[ \frac{1,08243216 - 1}{0,02} - 1 \right] = \\ &= 200 \cdot \left[ \frac{0,08243216}{0,02} - 1 \right] = 200 \cdot [4,121608 - 1] = 200 \cdot 3,121608 \approx 624,32\end{aligned}$$

Ou seja, as três parcelas geraram R\$ 624,32.



# Calculadora do Cidadão Banco Central do Brasil

<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADA0/>

## Aplicação com depósitos regulares

### Simule a aplicação com depósitos regulares

Número de meses

Taxa de juros mensal

%

Valor do depósito regular

(depósito realizado no início do mês)

Valor obtido ao final

Metodologia

Calcular

Limpar

Voltar

Imprimir

### Metodologia da Aplicação com Depósitos Regulares

$$S_n = (1 + j) \frac{(1 + j)^n - 1}{j} p$$

Onde:

$n$  = Nº de Meses

$j$  = Taxa de Juros Mensal

$p$  = Valor do Depósito Regular

$S_n$  = Valor Obtido ao Final

Obs. 1:  $S_n$  corresponde à soma de uma progressão geométrica formada por  $n$  pagamentos iguais a  $p$ , realizados no início de cada período e corrigidos até o final dos  $n$  períodos.

Obs. 2: O cálculo da taxa de juros ( $j$ ) é feito por aproximação do Valor Obtido ao Final ( $S_n$ ) com margem de erro sobre  $S_n$  inferior a 0.000001.