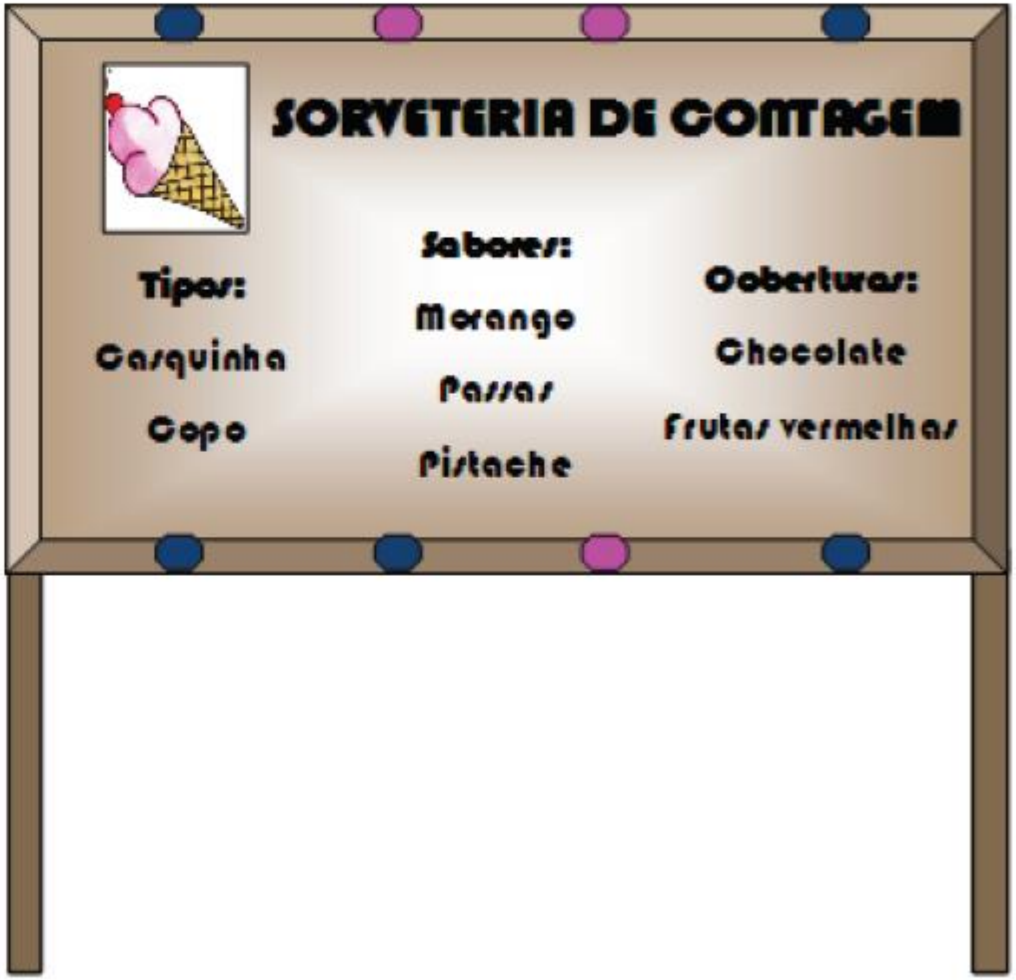
Contagem

Sequência didática

TREVIZAN, W. A., BROLEZZI, A. C. Como ensinar análise combinatória. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.



No dia da mudança, o clima estava quente. Assim que entrou na cidade da contagem, Marcela resolveu tomar um sorvete e parou na primeira sorveteria que viu. Ficou por alguns momentos olhando para a placa e não sabia que escolha fazer. A dúvida era tanta que resolveu contar todas as possibilidades que tinha, antes de tomar sua decisão.

DESAFIO 1 - De quantos modos Marcela pode montar seu sorvete, com exatamente uma bola e uma cobertura?

A solução desse primeiro desafio envolve o que é de fundamental para a Análise Combinatória, como o próprio nome diz: o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), conhecido também como princípio multiplicativo, segundo o qual para tomar uma decisão que envolve *n* escolhas, se para cada escolha temos k_1, k_2,... k_n opções, teremos o produto $k_1 \times k_2 \times (\ldots) \times k_n$ como o total de possibilidades para essa decisão. No caso desse desafio, para montar o sorvete, Marcela tem 3 escolhas a fazer, para as quais se oferecem 2, 3 e 2 opções. Portanto, o total de possibilidades de sorvete é $2 \times 3 \times 2 = 12$. Marcela pode montar seu sorvete de 12 modos.

Esperávamos com esse desafio que os alunos enumerassem cada uma das possibilidades, mas que percebessem o PFC como generalização de problemas desse tipo. Caso não percebessem, deveríamos despertar sua curiosidade com perguntas do tipo: E se fossem mais sabores? E se fossem mais coberturas?

O sorvete chegou, e com ele a maquineta em que ela deveria digitar a senha do cartão de débito. Marcela havia esquecido a senha completamente. Lembrava apenas que a senha tinha 4 dígitos numéricos e que eram todos ímpares. Não lembrava, nem mesmo, se tinham algarismos repetidos.

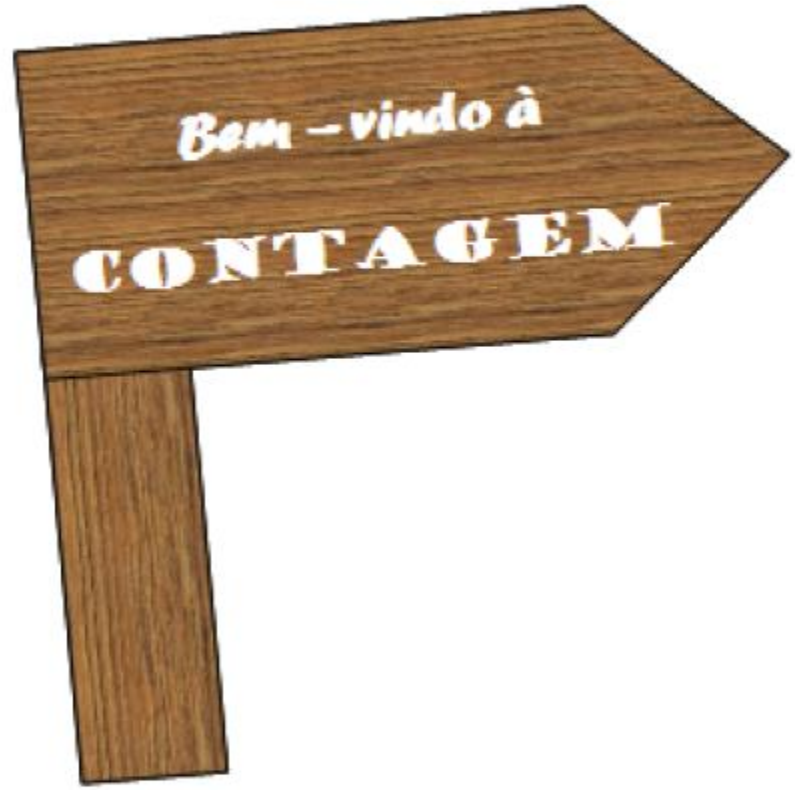
Por sorte havia trazido consigo uma quantia em dinheiro. Marcela pagou o sorvete e foi sentar-se para tomá-lo, muitíssimo preocupada, não pela senha, pois bastava ligar para sua mãe e esta lhe diria a senha. Marcela estava preocupada com a solução de um novo desafio.

DESAFIO 2 - Supondo que o cartão não fosse bloqueado depois de várias tentativas e que o sorvete não fosse derreter enquanto ela tentava várias senhas, no máximo, quantas vezes ela precisaria digitar?

Essa situação é mais difícil de enumerar. Assim, esperávamos que mesmo que os alunos tivessem enumerado as possibilidades no desafio anterior, nesse segundo desafio sentiriam a necessidade de desenvolver uma estratégia indireta de contagem. Ainda assim, acreditávamos que os alunos iniciariam a resolução enumerando algumas dessas possibilidades: 1111; 1113; 1115; 1117; 1119; 1131 etc.

Com isso perceberiam, aos poucos, que há 5 possibilidades para o último dígito, mantendo-se os 3 primeiros; há 5^2 possibilidades para os dois últimos dígitos, mantendo-se os dois primeiros; há 5^3 possibilidades para os três últimos dígitos, mantendo-se o primeiro; e assim, há $5^4=625$ possibilidades de senha.

A menos de 200 metros do local onde estava sentada, havia uma placa, na qual Marcela fitou o olhar. Marcela, que já ficara muito tempo exposta ao sol, viu as letras da placa se embaralhar. CONTAGEM, NOCTAMEG, ONCGATME, MEGATONC,...



Procurou, rapidamente, um banco para sentar-se à sombra, mas já era tarde demais. Um novo desafio viera lhe roubar mais alguns minutos de seu pensamento.

DESAFIO 3 - De quantos modos diferentes as letras da palavra CONTAGEM podem se posicionar?

Esse desafio também é baseado no PFC, como todos os desafios dessa sequência, mas nesse caso envolvendo uma PERMUTAÇÃO SIMPLES. Se levassem em consideração o que foi feito no desafio anterior, os alunos responderiam que são 8^8 os modos de permutar as letras da palavra contagem.

Há, no entanto, uma diferença nesse desafio. As letras na palavra não podem se repetir como os algarismos na senha. 1113 é uma senha permitida, enquanto CCCOOGGG não é um anagrama permitido. A nova dificuldade que esse desafio traz é pensar que as letras não podem se repetir, assim, ao optar por uma letra para ser a primeira, restam 7 opções para segunda letra; feita a escolha, restam 6 opções para a terceira letra; e assim sucessivamente. Portanto, o número de anagramas da palavra CONTAGEM é $8!=8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1= 40.320$.

O interessante de tudo isso é que Marcela não escreveu todas as palavras para contá-las uma a uma. Ela elaborou uma estratégia para resolver esse desafio. E a cada novo desafio, ela elaborava uma nova técnica para contar.

Marcela terminou de tomar o sorvete e ligou para sua mãe. Esta, ansiosa por receber o telefonema, fez milhares de perguntas antes de deixar sua filha contar o episódio da senha. Então a mãe de Marcela disse-lhe o número da senha, sucedido por inúmeros conselhos, como era comum.

Depois que desligou o celular, Marcela pensou: "Puxa vida! Se eu tivesse lembrado, ao menos, que na senha não tem 1 nem 9, e que o único dígito que se repete duas vezes é o 3... Teria ficado bem mais fácil."

DESAFIO 4 - Com essas dicas, quantas senhas ainda são possíveis?

Nesse desafio, análogo ao anterior, em vez de permutar as 8 letras da palavra "Contagem", os alunos devem calcular a permutação dos algarismos 3, 3, 5 e 7, percebendo que há repetição do algarismo 3. A solução desse desafio é, portanto, $(4!) \div 2 = 4 \times 3 = 12$.

Há duas dificuldades aqui. Uma delas é perceber que se trata de uma permutação, pois com as dicas fornecidas resta saber a ordem em que os algarismos 3, 3, 5 e 7 aparecem na senha. A outra dificuldade é perceber que, como o algarismo 3 se repete, ao calcular a permutação simples, obtemos duas vezes cada combinação, devendo, portanto, dividir esse resultado por 2. Esse é um problema de PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO.

Marcela gostou muito de sua faculdade. Tudo era muito diferente da escola: mais liberdade e mais responsabilidade. Ao término do primeiro dia de aula, a professora coordenadora entrou na sala, dizendo que, dentre os 40 alunos de sua turma, eles deveriam escolher 5 alunos distintos para compor uma comissão de representantes da turma. Cada um dos 5 representantes teria uma função diferente: integração, comunicação, repasse de documentos, participação em assembléias e promoção de eventos. Marcela ficou pensando: De quantos modos diferentes pode ser escolhida essa comissão?

DESAFIO 5 – De quantos modos é possível formar uma comissão de 5 alunos, dentre os 40, de modo que cada um tenha uma função diferente?

Na primeira parte da Sequência Didática, muitos raciocínios não foram explorados, como os de ARRANJO SIMPLES e COMBINAÇÃO SIMPLES. Para dar conta dessas ideias também fundamentais da Análise Combinatória, foi criada essa segunda parte da Sequência.

O desafio 5 é um caso de Arranjo Simples. A diferença desse desafio para os desafios que envolviam permutação é que nele a quantidade de vagas e de candidatos não é a mesma. Há 5 vagas e 40 candidatos. Dessa forma, a solução do desafio é dada por $40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 = 78.960.960$ modos de formar uma comissão.

Os alunos discutiram e chegaram à conclusão de que não era necessária a divisão de funções. *Os* 5 integrantes da comissão deveriam trabalhar em conjunto, assumindo todos os papéis de representantes da turma. Marcela logo percebeu que, com essa mudança, o número de comissões possíveis também mudou.

DESAFIO 6 - De quantos modos é possível formar uma comissão de 5 alunos, dentre os 40, não havendo distribuição de tarefas?

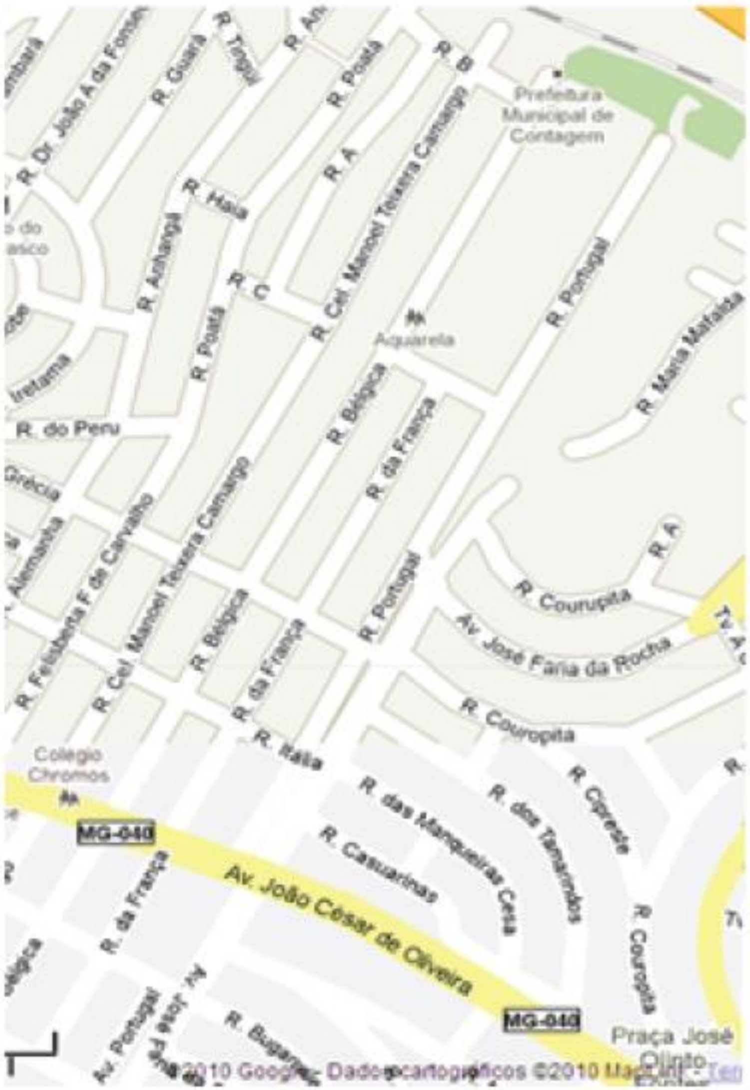
O desafio 6 é um caso de COMBINAÇÃO SIMPLES. A novidade dele, com relação ao desafio 5, é que agora tanto faz uma equipe formada pelos alunos A, B, C, D e E ou pelos alunos E, D, C, B e A. A ordem não importa, porque eles não irão desempenhar funções diferentes. Cada grupo de 5 alunos pode permutar de 5!=120 formas diferentes. Portanto, o resultado obtido no desafio 5 deve ser agora dividido por 120, resultando em 658.008 modos de se formar essa comissão.

Hora de ir para a casa. Marcela pegou o trem com destino à prefeitura Municipal de Contagem e, a partir de lá, iria caminhando até a sua moradia. Tinham seis lugares para se sentar no vagão em que entrou, no entanto, ela sentou-se no primeiro banco próximo à porta, pois suas malas estavam pesadas. Na estação seguinte, ninguém se levantou e entraram no vagão mais 3 mulheres e 2 homens. Enquanto escolhiam os lugares para se sentar, Marcela propôs a si mesma um novo desafio.

DESAFIO 7 - Desprezando a individualidade dos passageiros recém-chegados e levando-se em consideração apenas o sexo, de quantos modos homens e mulheres podem posicionar-se?

Há 5 lugares, os quais deverão ser ocupados por 3 mulheres e 2 homens. Trata-se da permutação de 3 mulheres e 2 homens, o equivalente à permutação das letras MMMHH, ou seja, uma permutação com repetição. Assim, divide-se 5! por 2! (permutação das letras M entre si) e por 3! (permutação das letras H entre si). Isso resulta em 10 modos de permutar homens e mulheres.

Além do desafio 7 ser mais difícil que os anteriores pela própria complexidade, que é crescente no decorrer da Sequência, entendemos que a compreensão desse enunciado também é mais difícil pela condição posta: “levando-se em consideração apenas o sexo”. No entanto, optamos por deixar o desafio para ver como os estudantes lidam com ele.



Chegando à Prefeitura Municipal de Contagem, Marcela tirou o mapa do bolso para se localizar.

Marcela está cansada e ainda precisa caminhar cerca de 1 km. A moradia ficava no cruzamento da Rua Portugal com a Avenida João César de Oliveira.

E lá estava ela em dúvida, de novo. Que caminho escolher para voltar para casa?

DESAFIO 8 - Utilizando o menor caminho possível e supondo que todos os quarteirões pelos quais irá passar são retangulares, de quantas maneiras diferentes ela pode chegar ao seu destino?

___

O desafio 8 é totalmente análogo ao desafio 7 e tem, portanto, o mesmo resultado, 10. Essa analogia entre desafios é também muito importante em Análise Combinatória.

Há, nesse desafio, uma dificuldade maior. Perceber que o problema dos caminhos pode ser transformado numa permutação com repetição não é natural, intuitivo. Independente do caminho escolhido, Marcela deverá caminhar 3 vezes em uma direção e 2 vezes na outra.