Análise combinatória e probabilidade

Pensamento combinatório

As técnicas de contagem de objetos, pessoas, eventos, etc. combinados de diferentes maneiras mobilizam um tipo de pensamento chamado **pensamento combinatório**, essencial para abordar problemas envolvendo chances e possibilidades. Vamos começar estudando uma situação de contagem bastante comum em nosso cotidiano.

Considere que um quiosque de comida oferece aos clientes três tipos de massa – *fettuccine*, *spaghetti* e *farfalle* – e quatro tipos de molho – ao sugo, à bolonhesa, *funghi* e quatro queijos. De quantas maneiras possíveis um cliente pode compor um prato combinando um tipo de massa e um tipo de molho?


RODRIGOBARK/SHUTTERSTOCK.COM

Fettuccine.


RODRIGOBARK/SHUTTERSTOCK.COM

Spaghetti.


RODRIGOBARK/SHUTTERSTOCK.COM

Farfalle.


JAROMILA/ISTOCKPHOTO.COM

Molho ao sugo.


JAROMILA/ISTOCKPHOTO.COM

Molho à bolonhesa.

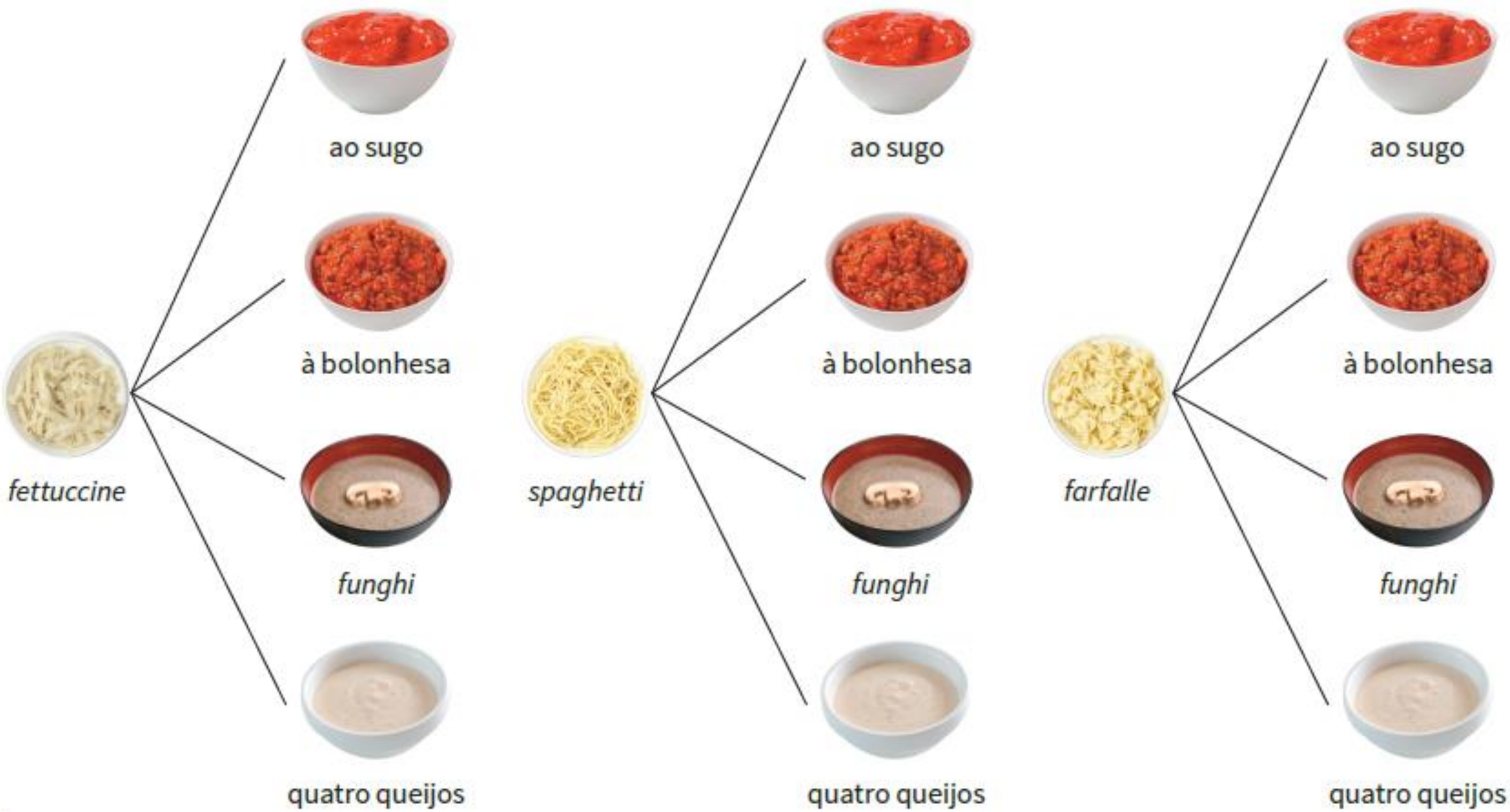

JUANMONINO/ISTOCKPHOTO.COM

Molho *funghi*.


SHEBEKO/SHUTTERSTOCK

Molho quatro queijos.

Com a ajuda da árvore de possibilidades, podemos contar todas as maneiras possíveis de compor um prato usando uma das massas e um dos molhos citados.



Para cada opção de massa temos quatro opções de molho, totalizando 12 possibilidades de combinação.

A escolha do prato é um exemplo de evento composto de duas etapas sucessivas e independentes, com 3 possibilidades em uma etapa (escolha da massa) e 4 possibilidades em outra (escolha do molho), totalizando 12 possibilidades ($3 \cdot 4 = 12$).

Problemas desse tipo envolvem o chamado **princípio fundamental da contagem** (PFC), conhecido também como princípio multiplicativo.

Agora, tomemos outro exemplo: suponha que a senha para desbloquear um celular seja composta de 3 algarismos. Quantas senhas é possível formar nessas condições?

Podemos listar e contar todas as senhas possíveis, o que seria um trabalho bastante cansativo, ou aplicar o princípio multiplicativo, estudando a posição ocupada pelos algarismos na senha. Basta saber que temos 10 possibilidades (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9) para cada posição:

$$\underset{1^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{10}} \cdot \underset{2^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{10}} \cdot \underset{3^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{10}}$$

Logo, é possível formar 1000 $(10 \cdot 10 \cdot 10)$ senhas.

E quantas senhas podemos formar com 3 algarismos distintos, ou seja, sem repeti-los na mesma senha? Nesse caso, se considerarmos 10 possibilidades para a 1ª posição, como não podemos repetir algarismos, restariam 9 possibilidades para a 2ª posição e 8 para a 3ª posição.

$$\underset{1^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{10}} \cdot \underset{2^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{9}} \cdot \underset{3^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{8}}$$

Portanto, podemos formar 720 ($10 \cdot 9 \cdot 8$) senhas sem repetir os algarismos.

Agora imagine quantos números é possível formar com 3 algarismos distintos. Nessa situação não podemos usar o algarismo zero na casa das centenas; então, temos 9 possibilidades para essa casa decimal. Como não pode haver repetição, restam 9 possibilidades para a casa das dezenas (8 algarismos mais o algarismo zero, que agora pode ser usado) e 8 para a casa das unidades.

$$\underbrace{9}_{\text{centena}} \cdot \underbrace{9}_{\text{dezena}} \cdot \underbrace{8}_{\text{unidade}}$$

Formamos, então, 648 ($9 \cdot 9 \cdot 8$) números com três algarismos distintos.

Em um evento composto de duas etapas sucessivas e independentes, se o número de possibilidades da primeira etapa for n e, para cada possibilidade da primeira etapa, o número de possibilidades da segunda etapa for m, então o total de possibilidades do evento é $n \cdot m$.

Permutação

Suponha que uma pessoa tenha esquecido a senha de 3 dígitos para desbloquear seu celular. Ela sabe que a senha é formada pelos algarismos 1, 3 e 5, mas não se lembra da ordem que ocupam na senha. Em quantas tentativas, no máximo, ela conseguirá desbloquear o celular?

Podemos listar as senhas ou aplicar o PFC:

$$\underset{1^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{\ 3\ }} \cdot \underset{2^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{\ 2\ }} \cdot \underset{3^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{\ 1\ }}$$

Há 3 possibilidades para a 1ª posição, 2 para a 2ª e apenas 1 possibilidade para a 3ª posição, o que nos dá um total de 6 $(3 \cdot 2 \cdot 1)$ possibilidades. Assim, em 6 tentativas, no máximo, ela conseguirá desbloquear o celular.

Esse exemplo envolveu a **permuta** (troca) de posição de 3 algarismos em 3 posições; por isso dizemos que **permutamos** 3 algarismos em 3 posições. Situações como essa são chamadas de **permutações simples**.

Em quantas disposições diferentes as
4 amigas poderiam se agrupar?

Vamos estudar outro exemplo de permutação simples. Suponha que 4 amigas (Amanda, Camila, Júlia e Rosana) vão posar lado a lado para uma foto. Quantas são as possibilidades de disposição das meninas?

Nesse caso, as 4 amigas podem ocupar 4 posições diferentes. Assim, pelo PFC:

$$\underset{1^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{4}} \cdot \underset{2^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{3}} \cdot \underset{3^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{2}} \cdot \underset{4^{\underline{a}}\text{ posição}}{\underline{1}}$$

Consideramos 4 possibilidades para a 1ª posição, 3 para a 2ª, 2 para a 3ª e 1 para a 4ª posição, que resultam em 24 ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) possibilidades diferentes de disposição das amigas para a foto.

Perceba que esse cálculo é semelhante ao que fizemos para o caso da senha do celular. No caso das meninas, tínhamos 4 elementos para permutar e o cálculo resultou em uma multiplicação do número 4 pelos antecessores dele, terminando no 1. O mesmo ocorreu no caso da senha, em que dispúnhamos de 3 opções e o cálculo para encontrar a permutação desses elementos foi a multiplicação do número 3 pelos seus antecessores, terminando no 1.

Trabalhando com esse tipo de situação de contagem, o matemático francês Christian Kramp (1760-1826) introduziu o símbolo **!** para representar esse cálculo. No caso da foto das amigas, o cálculo seria representado assim: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. O produto desse tipo de cálculo é chamado de **fatorial**; por exemplo, lemos 4! como "quatro fatorial" ou "fatorial do número 4".

Talvez você tenha notado, nos exemplos que vimos, que $3! = \mathbf{6}$ mas $4! = \mathbf{24}$. Ou seja, mesmo quando há apenas uma unidade de diferença entre os números, os fatoriais deles podem ser bem diferentes: quanto maior o número, muito maior o fatorial.

O fatorial de um número $n!$ é o produto de todos os naturais menores ou iguais a n. Isto é:

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para n natural.

Por definição, $0! = 1$.

Esse resultado expressa a quantidade de permutações simples P_n de n elementos, ou seja, $P_n = n!$.

A tabela abaixo lista os fatoriais de alguns números. Compare cada número com seu fatorial e note como o produto aumenta rápido quando existem mais permutações possíveis.

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 638 800
20	2 432 902 008 176 640 000
70	$\simeq 1{,}2 \cdot 10^{100}$

De acordo com a tabela, 70! tem mais de 100 casas. Isso significa que, se fosse necessário dispor 70 pessoas em uma fila em todas as posições possíveis, o número de possibilidades diferentes seria astronômico, o que torna inviável listar todas as permutações possíveis.

Anagramas

Quando realizamos a permutação entre as letras de uma palavra, encontramos o que chamamos de **anagramas**. A palavra *anagrama* – do grego *ana* (voltar, repetir) e *graphein* (escrever) – é usada para denominar o resultado de um rearranjo das letras de uma palavra. Por exemplo, os anagramas da palavra DIA são: DIA, DAI, AID, ADI, IDA, IAD.

O número de anagramas de uma palavra que tem todas as letras diferentes é igual ao fatorial da quantidade de letras dessa palavra. Assim, DIA tem 3! anagramas, ou seja, 6 anagramas.

- Quantos são os anagramas da palavra AMOR? Faça uma lista com todos eles e circule aqueles que apresentam sentido, ou seja, que formam outras palavras da língua portuguesa.

Algumas situações podem apresentar restrições. Por exemplo, vamos calcular apenas os anagramas da palavra JADE que começam com a letra J.

Com essa restrição, a letra J ficará fixa na primeira posição e, portanto, não será permutada com as demais, restando a permutação das 3 letras restantes (A, D e E) em 3 posições. Assim:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ou seja, temos 6 anagramas da palavra JADE que começam com a letra J. A restrição reduziu a situação a um caso de permutação de 3 letras.

Agora, imagine os anagramas da palavra AMAR. Perceba que nessa palavra a letra A aparece duas vezes. Se trocássemos os As de lugar, não faria diferença, isto é, teríamos o mesmo anagrama. Então, qual é o procedimento para excluir essas repetições e obter o número total de anagramas distintos?

Primeiro, vamos descobrir quantas são essas repetições. O quadro abaixo mostra todos os anagramas da palavra AMAR. Um dos As foi escrito em vermelho, apenas para que seja possível distingui-lo do outro.

AMAR	MAAR	AMAR	RAMA
AMRA	MARA	AMRA	RAAM
AAMR	MAAR	AAMR	RMAA
AARM	MARA	AARM	RMAA
ARMA	MRAA	ARMA	RAMA
ARAM	MRAA	ARAM	RAAM

Se desconsiderarmos a cor que diferencia os As, fica mais fácil identificar os anagramas repetidos. Abaixo, estão destacadas essas repetições.

AMAR	MAAR	AMAR	RAMA
AMRA	MARA	AMRA	RAAM
AAMR	MAAR	AAMR	RMAA
AARM	MARA	AARM	RMAA
ARMA	MRAA	ARMA	RAMA
ARAM	MRAA	ARAM	RAAM

A repetição ocorre em metade dos anagramas, isso porque em todos os anagramas os As podem trocar de lugar. Logo, o número de anagramas distintos é:

$$\frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Essa situação é chamada de **permutação com repetição**.

Vamos estudar outros exemplos de permutação.

1º) A palavra LETRAS é composta de 6 letras distintas; portanto, a quantidade de anagramas dessa palavra é:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

2º) A palavra BANANA também tem 6 letras, mas o A aparece três vezes e o N aparece duas vezes. Assim, o número de anagramas de BANANA deve excluir as repetições de A e N. Como vimos, quando há duas letras iguais, o número de anagramas se reduz à metade. Mas e quando a mesma letra aparece três vezes? Note que, para cada anagrama, se permutarmos essas três letras iguais, obteremos sempre o mesmo resultado. Veja o exemplo a seguir, em que cada letra A está identificada com uma cor:

BANANA	BANANA	BANANA
BANANA	BANANA	BANANA

Dessa forma, essa repetição de três letras iguais reduz a quantidade de anagramas que deve ser dividida pelo número que corresponde à permutação de 3, que são as vezes que a letra A se repete. Então, o número de anagramas da palavra BANANA será obtido fazendo 720 dividido por 2 (repetição do N), e novamente por 6 (repetição do A). Assim, $\frac{360}{6} = 60$, resultando em 60, o número correto de anagramas de BANANA.

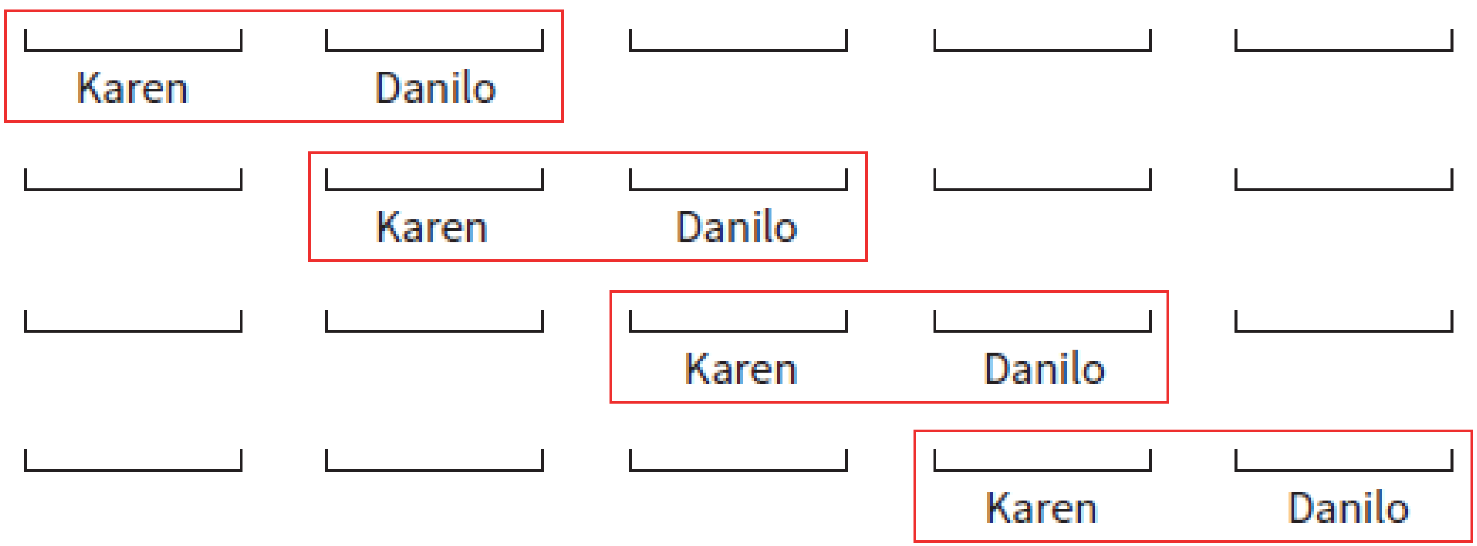
Recapitulando, o que fizemos para chegar a esse número foi:

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{720}{12} = 60$$

Note que 2! corresponde às repetições da letra N e 3! corresponde às repetições da letra A.

3º) De quantas maneiras 5 amigos – Pedro, Jonas, Sandra, Karen e Danilo – podem se sentar lado a lado, de modo que Karen e Danilo estejam sempre um ao lado do outro?

Vamos analisar todos os casos em que essas duas pessoas poderão estar lado a lado. Observe:



Perceba que há quatro posições possíveis para a dupla Karen/Danilo; as outras três pessoas vão se permutar no restante das posições. Então, para cada uma das quatro posições que podem ser ocupadas pela dupla Karen/Danilo, temos 6 ($3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$) possibilidades de posicionamento dos demais amigos. Isso sugere que teremos 24 ($4 \cdot 6$) possibilidades de posicionamento.

Mas observe que no esquema acima está representada apenas a situação em que a dupla está sentada na ordem Karen/Danilo; temos de computar também a ordem Danilo/Karen. Então, para cada possibilidade de permutação que calculamos, temos duas possibilidades de posicionamento da dupla, totalizando 48 ($2 \cdot 24$) possibilidades.

Uma permutação de n elementos com repetição nas quantidades a, b, c, ... é dada por:

$$P_n^{a,\, b,\, c,\, \ldots} = \frac{n!}{a!\, b!\, c! \ldots}$$

Agrupamentos

Imagine que um festival de teatro conceda premiação às 3 melhores peças apresentadas. Sabendo que 10 peças concorrem nesse festival, quantas são as possibilidades de premiação?

Para compreender melhor essa situação, vamos nomear as peças com letras do alfabeto: A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Perceba que, para a primeira colocação no festival, temos 10 possibilidades de peças; para a segunda, temos 9 possibilidades; e para a terceira, restam 8 possibilidades. Então, o total de possibilidades para os três primeiros lugares no festival é:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Neste caso, a ordem que as peças ocupam na premiação faz diferença.

Por exemplo, o resultado 1º — A, 2º — B e 3º — C – em que a companhia A é a primeira colocada, a companhia B, a segunda e a companhia C, a terceira – é diferente do resultado 1º — C, 2º — A e 3º — B.

Nesse exemplo, formamos agrupamentos de p elementos dos n elementos disponíveis, em que a ordem dos elementos nos agrupamentos distingue um agrupamento de outro. Chamamos esse tipo de situação de **arranjo simples**.

Vamos estudar outro exemplo em que há uma restrição para a formação dos agrupamentos. Considere que, em uma turma de ginástica formada por 6 alunas, a professora fez um sorteio. A primeira sorteada ganhou uma bola, a segunda ganhou uma faixa e a terceira sorteada ganhou um colchonete. Janaína foi uma das sorteadas.

Nessa situação temos três casos, pois precisamos considerar que Janaína pode ocupar qualquer uma das três posições.

Janaína		
1ª	2ª	3ª
	Janaína	
1ª	2ª	3ª
		Janaína
1ª	2ª	3ª

Em cada caso, para as demais posições tomamos 2 alunas das 5 restantes, pois já conhecemos uma das alunas sorteadas. Assim, o total de possibilidades para esse caso será:

$$3 \cdot (5 \cdot 4) = 60$$

Agora, imagine outra situação.

Suponha que 2 alunos serão sorteados de uma turma de um curso de idiomas composta por 5 pessoas: Paula, Henrique, Juliano, Maurício e Vitória. De quantas maneiras diferentes a dupla de alunos poderá ser formada?

Precisamos tomar 2 pessoas de um grupo de 5. Portanto, para a primeira posição temos 5 possibilidades e para a segunda, 4 possibilidades, totalizando:

$$5 \cdot 4 = 20$$

Porém, perceba que a dupla "Paula e Henrique" não é diferente da dupla "Henrique e Paula". Nesse caso, as repetições devem ser descontadas do resultado anterior, pois cada dupla foi contada duas vezes, o que corresponde a $2! = 2$. Observe:

$$\frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

No exemplo da página anterior, também formamos agrupamentos de *p* elementos de *n* disponíveis, porém a ordem dos elementos nos agrupamentos não distingue um agrupamento do outro. Chamamos esse tipo de situação de **combinação simples**.

Veja outro exemplo.

Para atender ao pedido dos professores de Biologia, o bibliotecário de uma escola vai comprar alguns livros. O professor de Biologia lhe passou uma lista de 5 livros, dos quais serão comprados 3. De quantas maneiras diferentes pode ser feita essa compra?

O número de compras possíveis de 3 livros de Biologia dentre os 5 é uma **combinação simples** de 5 elementos, tomados 3 a 3, pois a ordem desses 3 livros não importa. Nesse caso, as repetições precisam ser descontadas:

$$\frac{(5 \cdot 4 \cdot 3)}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

Ou seja, há 10 maneiras de escolher os livros.

O número de arranjos simples, $A_{n,p}$, de n elementos em agrupamentos de p elementos é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ em que } p \leqslant n$$

O número de combinações simples, $C_{n,p}$, de n elementos em agrupamentos de p elementos é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ em que } p \leqslant n$$

2. Um amigo diz a outro: “O número do meu apartamento é formado por 3 algarismos ímpares”. Quantas possibilidades há para o número desse apartamento?

2. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ possibilidades

3. Uma família formada por avó, mãe e três filhos reúne-se na sala para assistir à televisão. Na sala há um sofá de três lugares e duas poltronas individuais. De quantos modos diferentes o sofá de três lugares poderá ser ocupado?

3. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modos

8. Quantos anagramas da palavra CONTA:

a) começam com C?

b) iniciam em consoante?

c) trazem as consoantes todas juntas?

d) apresentam as consoantes juntas e na ordem CNT?

8. a) $P_4 = 4! = 24$ anagramas

b) $3P_4 = 3 \cdot 4! = 72$ anagramas

c) $P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 36$ anagramas

d) $P_3 = 3! = 6$ anagramas

10. (Unicamp-SP-2013) Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria:

a) inferior ao dobro.

b) superior ao dobro e inferior ao triplo.

c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.

d) mais que o quádruplo.

10. Número de placas em vigor: $26^3 \cdot 10^4$

Número de placas com a modificação: $26^4 \cdot 10^3$

Aumento em relação ao número de placas em vigor:

$$\frac{26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{26^3 \cdot 10^3(26 - 10)}{26^3 \cdot 10^3(10)} = \frac{16}{10} = 1{,}6 \text{ vez maior}$$

Resposta: alternativa **a**.

13. Sete pessoas estão de pé em um vagão de trem e 5 assentos ficam vagos. De quantos modos esses assentos podem ser ocupados por essas pessoas?

13. $A_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ modos

14. De quantos modos podemos escolher 5 dentre 7 pessoas para compor um time de basquete? Considere que todas as pessoas podem jogar em qualquer posição: armador principal, ala-armador, ala, líbero e pivô.

14. $C_{7,5} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21$ modos

17. Quantas senhas podem ser formadas com:

a) 4 algarismos distintos?

b) 4 letras distintas?

c) combinando 2 letras distintas com 2 algarismos distintos?

17. a) $A_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ senhas

b) $A_{26,4} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$ senhas

c) $A_{26,2} \cdot A_{10,4} \cdot P_4^{2,2} = 10 \cdot 9 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \frac{4!}{2!2!} =$

$= 35100$ senhas

30. Um grupo de 12 amigos acampará usando 3 barracas. De quantas maneiras diferentes é possível acomodar 4 amigos em cada barraca?

30. $\dfrac{12!}{4!4!4!} = 34\,650$ maneiras

32. (Vunesp-SP-2013) Quantos são os números naturais que podem ser decompostos em um produto de quatro fatores primos, positivos e distintos, considerando que os quatro sejam menores que 30?

32. Conjunto dos números primos menores que 30:
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210 \text{ números}$$