Áreas e volumes
Princípio de Cavalieri

Na Renascença europeia, no período final da Idade Média, houve a revalorização da cultura da Grécia antiga. Leonardo da Vinci (1452-1519), símbolo do homem renascentista por excelência, dedicou estudos à estereometria, parte da Geometria que trata do cálculo de volume dos sólidos.

Galileu Galilei (1564-1642), estudioso italiano, também retomou diversos trabalhos que haviam sido iniciados pelos gregos e deu nova face ao estudo da Física e da Matemática. Após um encontro com Galileu, Cavalieri tornou-se seu discípulo e desenvolveu um método de calcular áreas e volumes de figuras que, retomando a forma de pensar de Arquimedes, estabelecia novos princípios, os quais permitem um tratamento mais geral na determinação de áreas e volumes.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

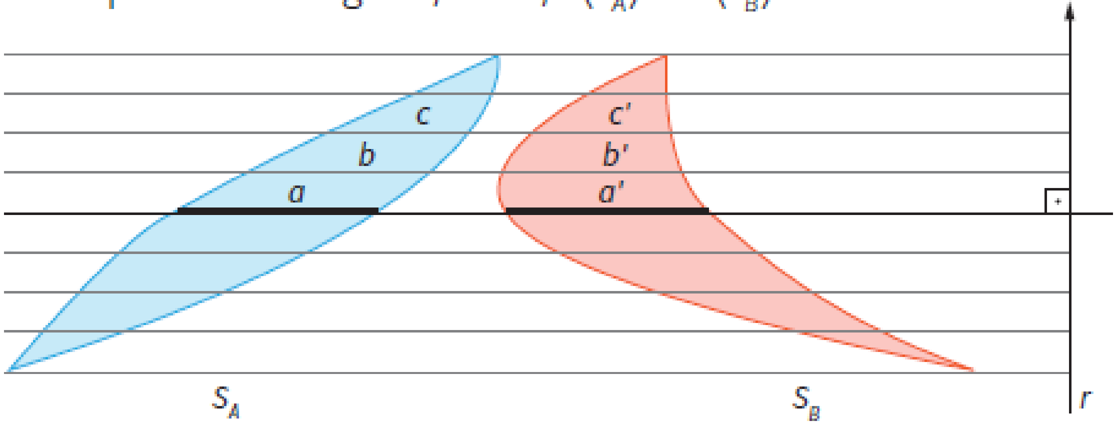
Imagine uma figura composta por diversos segmentos de reta paralelos, aqui representados por lápis de cor. Mantendo o mesmo conjunto de lápis unidos, mas empurrando alguns deles, formamos uma nova figura. Apesar de terem formas diferentes, as figuras ocupam a mesma área, já que os segmentos que as compõem são de mesmo comprimento e se mantêm paralelos.

As duas figuras formadas pelos lápis ocupam a mesma área, pois têm a mesma quantidade de lápis iguais e justapostos.

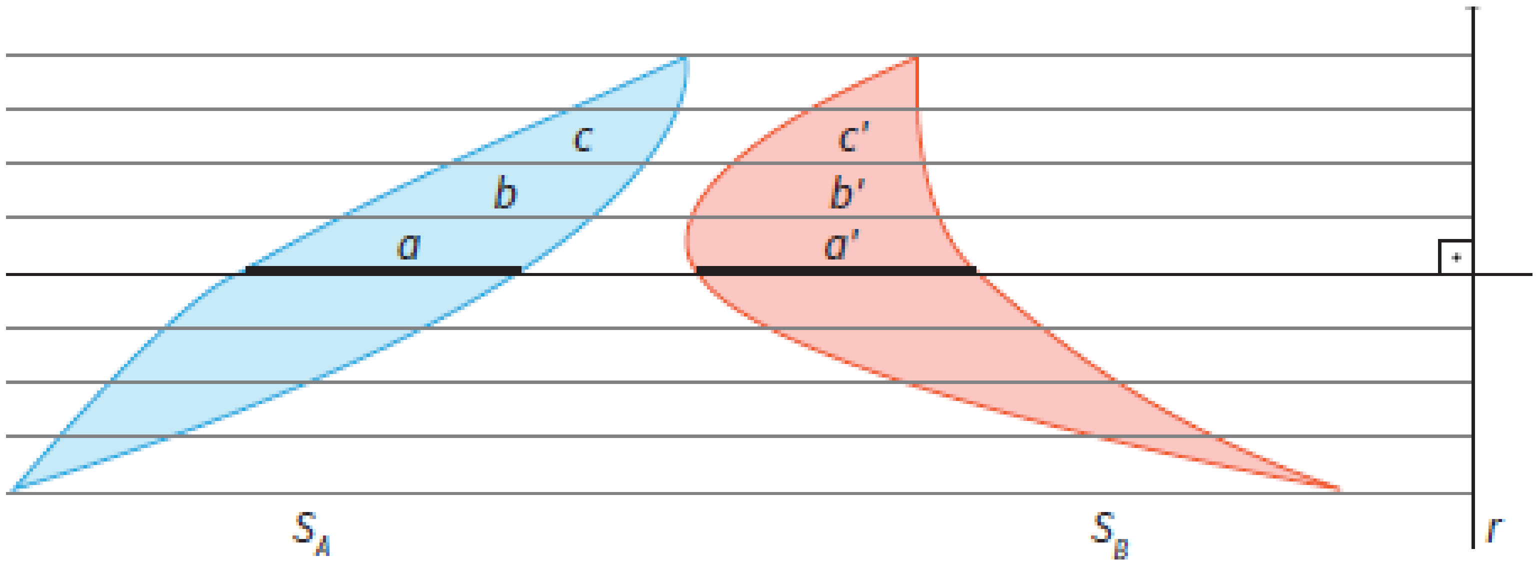
Princípio de Cavalieri: Áreas

O princípio de Cavalieri pode ser utilizado para estudar tanto áreas quanto volumes. Vamos inicialmente analisar sua aplicação no cálculo de áreas.

Dadas duas formas planas, uma direção fixa e retas perpendiculares a essa direção, se cada uma dessas retas seccionar as formas planas em segmentos de retas de mesmo comprimento, então as formas têm áreas iguais. Na figura abaixo, as retas perpendiculares à reta r determinam segmentos de reta sobre as superfícies S_A e S_B. Se esses segmentos tiverem comprimentos iguais, ou seja, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ e assim por diante, então as medidas das duas superfícies são iguais, isto é, $A(S_A) = A(S_B)$.



Princípio de Cavalieri: Áreas



rem rectæ, DF, vel nihil est saltem ad alteram partem, si enim ali-qua illius portio esset ad alteram partem rectæ, DF, iam recta, DF, secaret figuram, BAC, quod est absurdum, ergo recta, DF, tan-git curuam, BAC, igitur possibile est, &c.

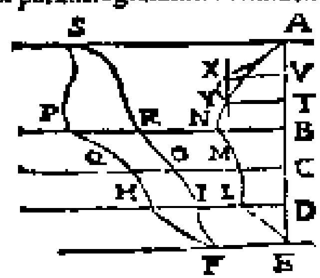
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea datam cur-uam totam in eodem plano cum ea existentem contingens, quæ quidem datæ rectæ lineæ sit æquidistans.

LEMMA IV.

Si proposita quæcumque figura plana vni regulæ paral-lelis quotcumque lineis ita secari possit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper existant: Ipsa ex pa-rallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, siue ex figuris in alteram partem deficientibus, regula eadem, compo-netur.

Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta quot-cumq; vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa rectæ lineæ integræ sint. Dico ipsam, vel ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram partem deficientibus, reg. eadem, FE, componi. Sint enim ductæ, SA, FE, op-positæ tangentes figuræ, SPF R, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumq; recta linea, AE, moueatur autem, F E, versus, SA, semper æquidi-stanter eidem, SA, donec illi

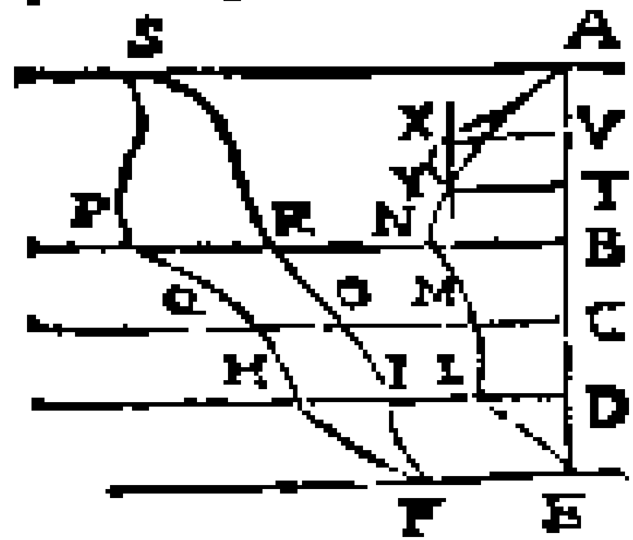


congruat, interim verò punctum, E, ita in ipsa feratur, vt descri-bat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, comprehendentem, quæ eidem, SPFR, sit æqualiter analoga iuxta regulam, FE, in eadem integris existentibus parallelis ipsi, FE, ad ambitum, ANE, terminatibus; rursus feratur recta linea, AE, versus ambitum, A NE, semper ipsi, AE, æquidistanter donec totam pertransierit fi-guram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ sic decurrentis

in

in alteram partem deficientibus, regula eadem, compo-
netur.

Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta quotcumq; vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa rectæ lineę integræ sint. Dico ipsam, vel ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram partem deficientibus, reg. eadem, FE, componi. Sint enim ductæ, SA, FE, oppositæ tangentes figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumq; recta linea, AE, moueatur autem, AE, versus, SA, semper æquidistanter eidem, SA, donec illi 2. Def. 1



congruat, interim verò punctum, E, ita in ipsa feratur, vt describat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, comprehendentem, quæ eidem, SPFR, sit æqualiter analoga iuxta regulam, FE, in eadem integris existentibus parallelis ipsi, FE, ad ambitum, ANE, terminatis; rursus feratur recta linea, AE, versus ambitum, ANE, semper ipsi, AE, æquidistanter donec totam pertranseat figuram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ sic decurrentis

in

O princípio de Cavalieri foi publicado em 1635, na obra *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova* (Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos), escrita pelo padre jesuíta Bonaventura Cavalieri. O princípio de Cavalieri, que resgata ideias já trabalhadas na Antiguidade – por exemplo, por Arquimedes, no século III a.C. –, é um exemplo de como na Matemática algumas ideias são desenvolvidas sem que se tenha noção da utilidade que poderão vir a ter no futuro. Portanto, ainda que certos resultados matemáticos do presente possam não ter aplicações práticas imediatas, isso não lhes tira o valor, pois poderão ser de grande utilidade no futuro.

A análise de objetos tridimensionais através do estudo de suas secções bidimensionais é chamada **estereologia**. Essa análise é baseada em um conjunto de técnicas desenvolvidas a partir de conceitos da Geometria, como o princípio de Cavalieri, e de estudos de probabilidade. Por meio da observação de imagens bidimensionais de estruturas tridimensionais, como as imagens obtidas em exames de tomografia e ressonância magnética, a estereologia é capaz de estimar, entre outras medidas, o volume, a densidade e a área da superfície de órgãos e outras estruturas do corpo humano.

Princípio de Cavalieri: Volumes

Conhecendo a expressão do volume de um bloco retangular, podemos utilizá-la para expressar o volume de outros sólidos geométricos.

A relação entre volumes de sólidos geométricos pode ser expressa pelo princípio de Cavalieri para volumes. A ideia intuitiva desse princípio é a de que formas espaciais compostas das mesmas secções paralelas à base, mesmo que as secções estejam deslocadas, terão o mesmo volume. De fato, veremos que não é necessário que as secções sejam congruentes, basta que tenham a mesma área.

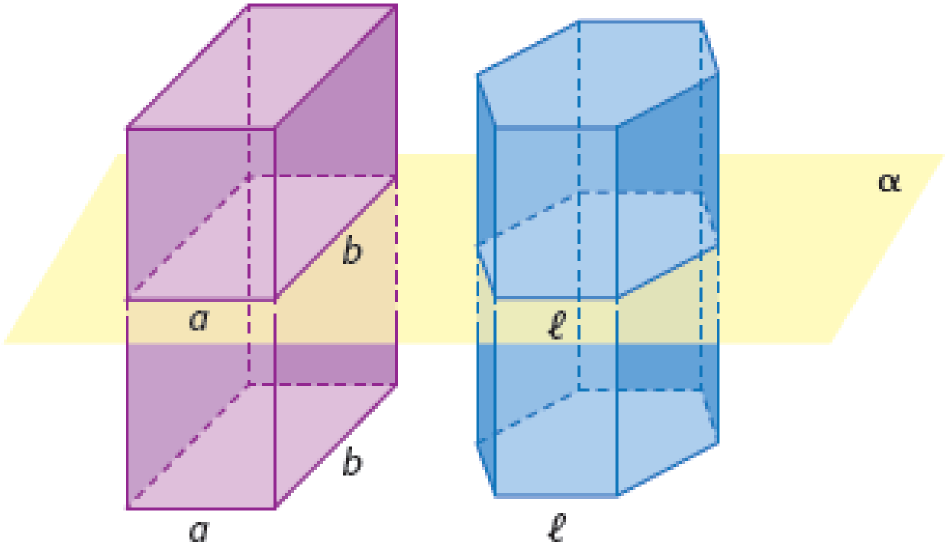
De maneira análoga ao princípio de Cavalieri para áreas, dadas duas formas sólidas espaciais, uma direção fixa e planos perpendiculares a essa direção fixa, se as secções dessas formas por cada um desses planos tiverem áreas iguais, então as formas espaciais têm volumes iguais.

As mesmas caixas de CD, empilhadas de duas formas diferentes, irão constituir dois sólidos diferentes, mas que ocupam o mesmo espaço; ou seja, têm volumes iguais.

Volume do prisma

O princípio de Cavalieri não exige que as formas das secções transversais sejam congruentes ou semelhantes, mas apenas que tenham a mesma área.

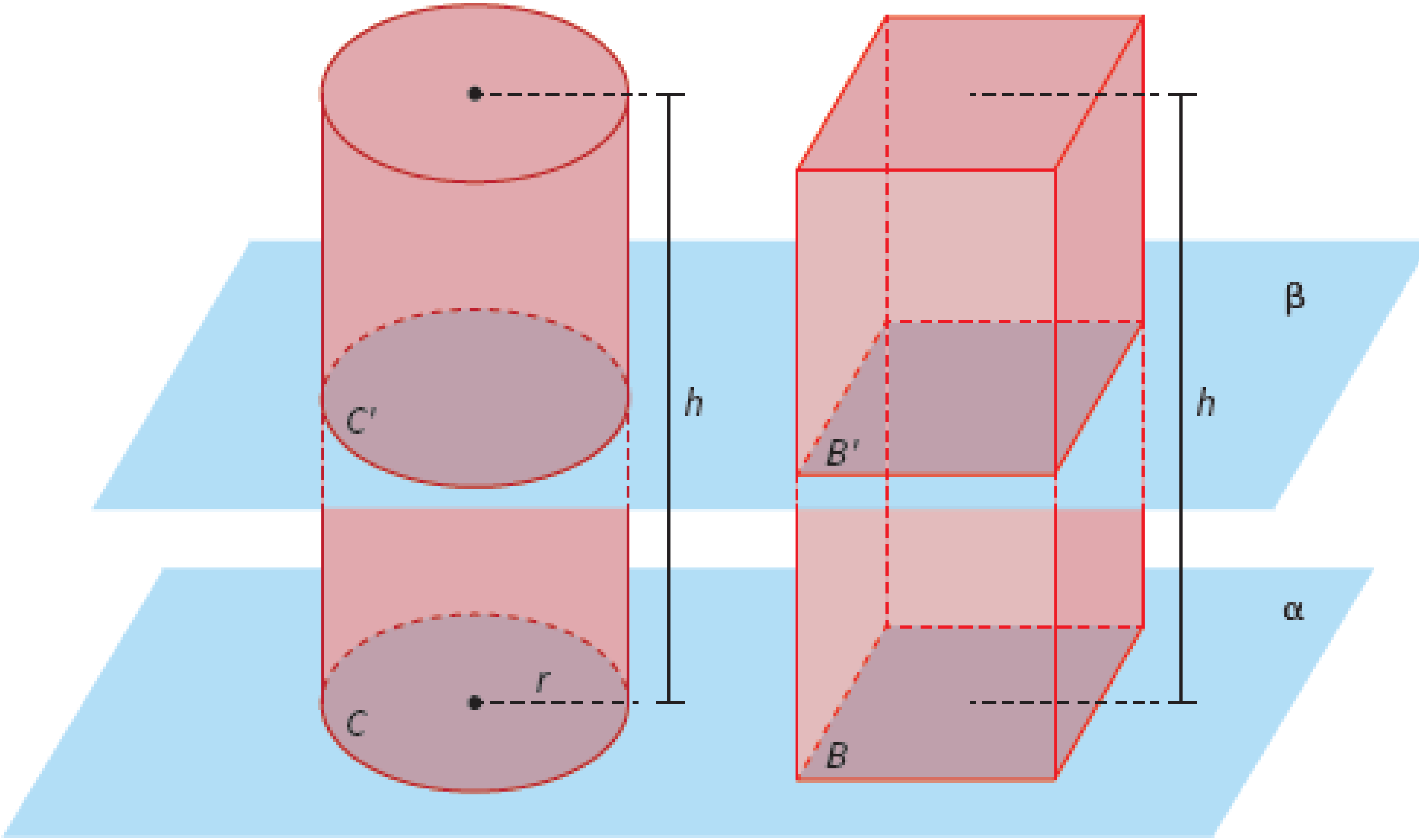
Prismas de bases em formas quaisquer terão o mesmo volume se atenderem às condições do princípio de Cavalieri. Por exemplo, veja as ilustrações dos prismas abaixo. Se as áreas das bases do prisma hexagonal e do bloco retangular forem iguais, e suas alturas forem iguais, então os volumes desses prismas serão iguais, e o volume de cada um será dado pelo produto da área da base pela altura.



Volume do cilindro

O princípio de Cavalieri permite mostrar que o volume de um cilindro é dado pelo produto da área da sua base pela sua altura.

O princípio de Cavalieri diz que, se qualquer plano paralelo a um plano dado produz secções de mesma área em dois sólidos, então esses sólidos têm o mesmo volume. Vamos comparar os volumes de dois sólidos: um cilindro de base C e altura h e um bloco retangular de base B e altura h. Suponha que as áreas de C e B sejam iguais. Sabe-se que no cilindro qualquer secção C' paralela à base é congruente à base. E em qualquer prisma uma secção B' paralela à base é congruente à base. Como as bases de ambos têm áreas iguais, então as secções produzidas por qualquer plano paralelo ao plano das bases também possuem áreas iguais. Logo, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cilindro é igual ao volume do bloco retangular de mesma área de base e mesma altura. O volume do cilindro é o produto da base pela altura.

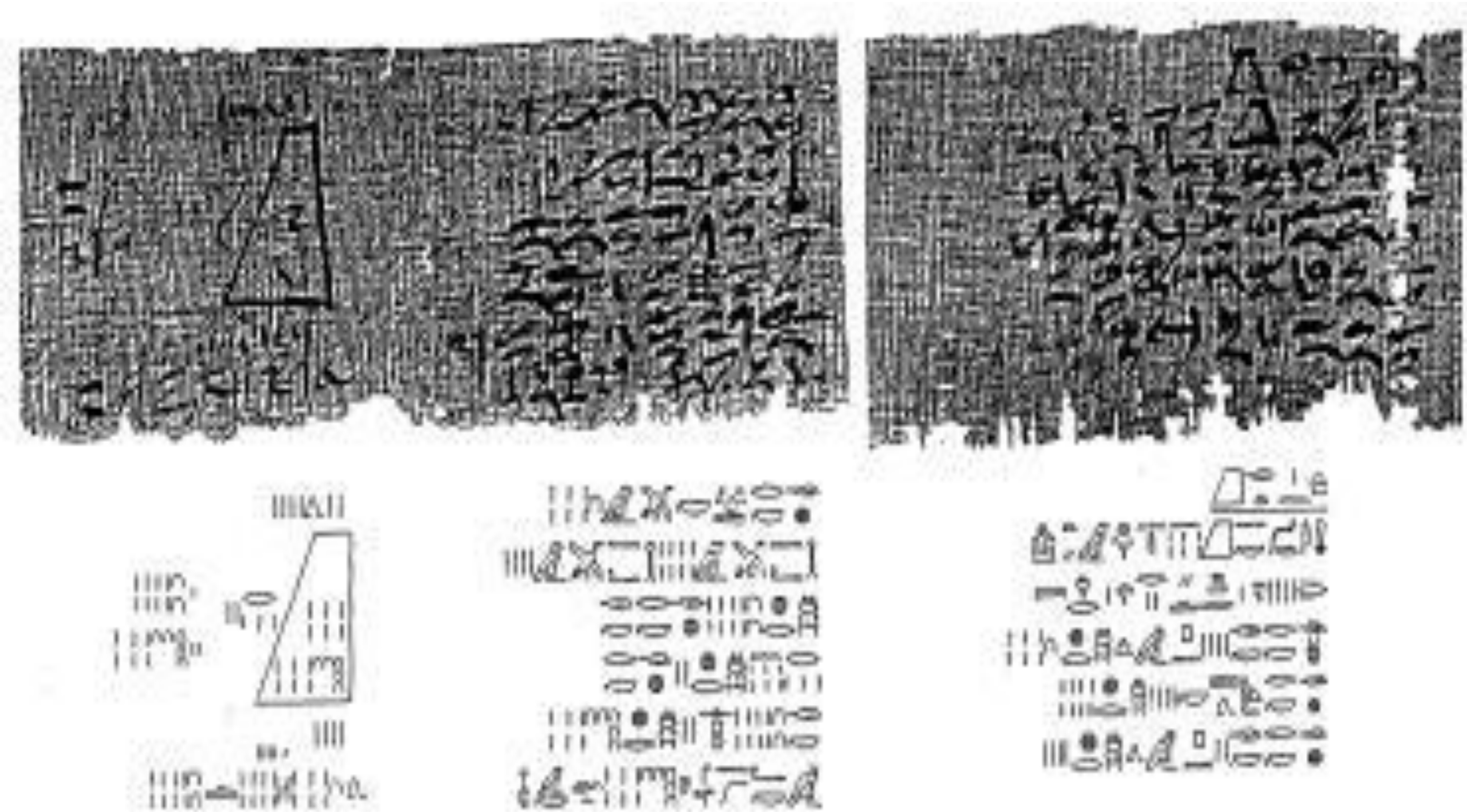


O volume de qualquer cilindro que tem a área da base igual a A e altura h pode ser calculado fazendo:

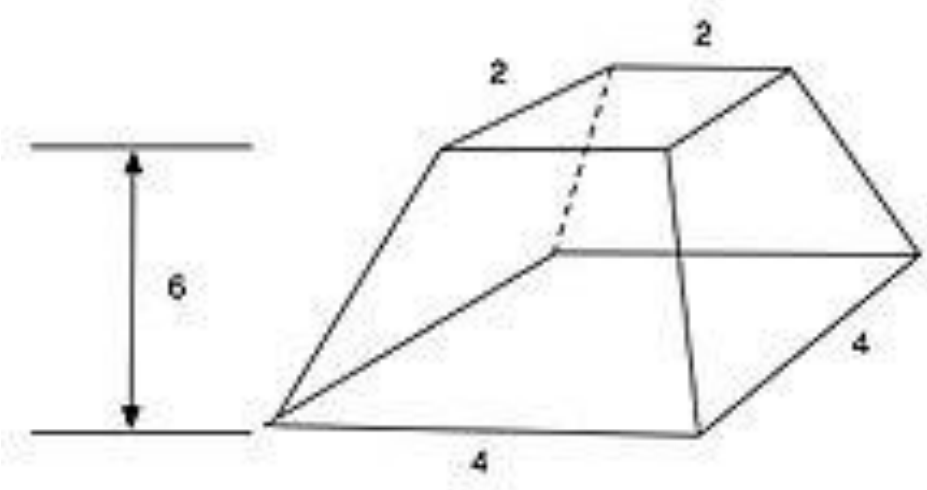
$$V = A \cdot h$$

Papiro de Moscou (Golonishev)
5,5 m por 8 cm
1850 a.C.
25 problemas de matemática

Problema 14: Volume do tronco da pirâmide quadrada



Volume de um tronco de pirâmide de base quadrada.

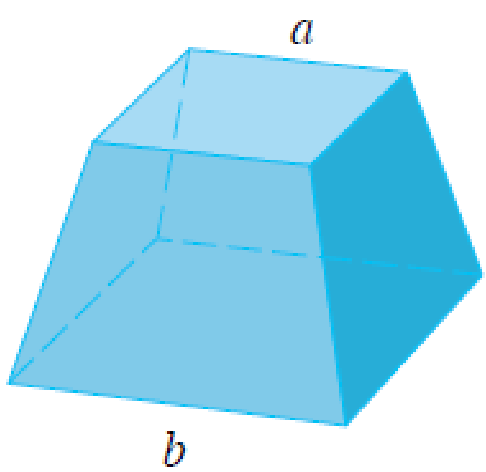


Volume de um tronco de pirâmide de base quadrada.

"Se lhe disserem: uma pirâmide truncada de 6 para a altura vertical de 4 na base por 2 no topo: Você deve elevar o 4 ao quadrado; resultado 16. Você deve dobrar 4 ; resultado 8. Você deve elevar ao quadrado este 2; resultado 4. Você deve somar o 16, o 8 e o 4; o resultado 28. Você deve pegar 1/3 de 6; o resultado 2. Você deve tirar o 28 duas vezes; resultado 56. Veja, é de 56. Você vai achar [isso] certo "

A solução para o problema indica que os egípcios estariam seguindo a fórmula correta para obter o volume de uma pirâmide truncada:

Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.



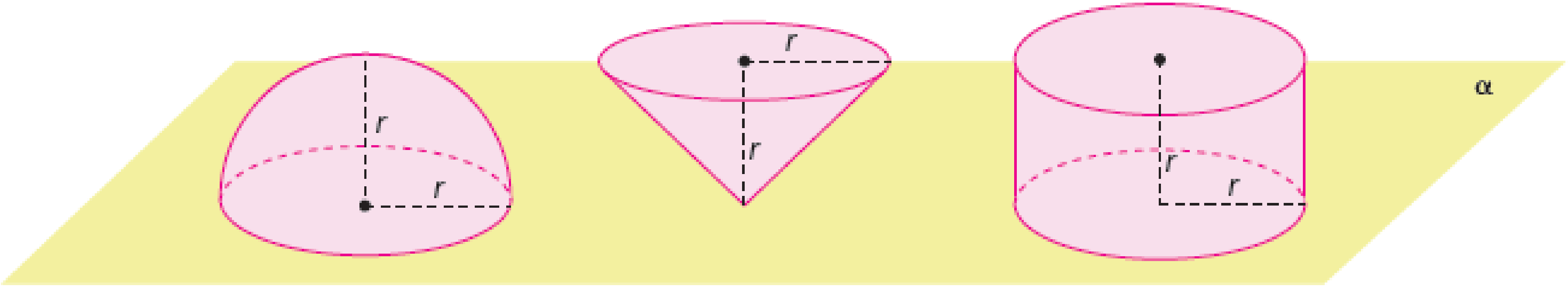
$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

Volume da esfera

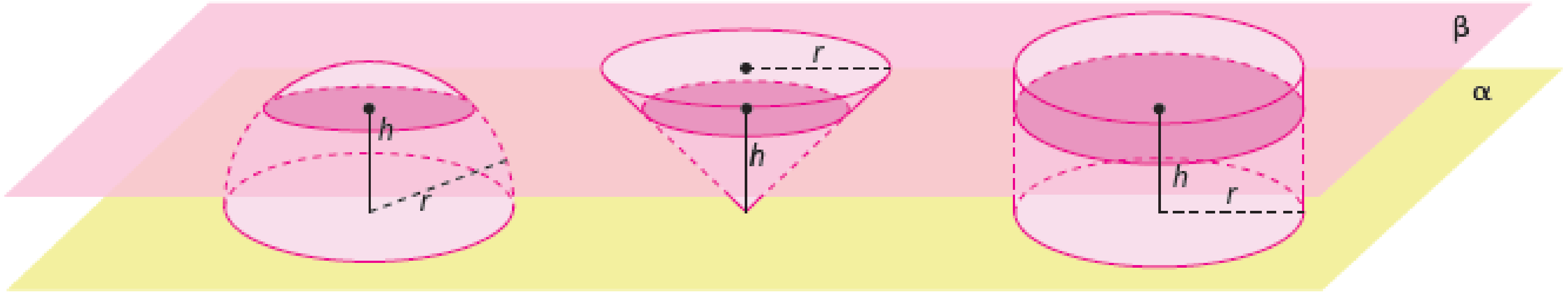
O inventor grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) criou um método para calcular o volume da esfera, o qual é descrito em um dos textos do chamado *Palimpsesto de Arquimedes*. A palavra **palimpsesto** designa um texto antigo sobre o qual se escreve outro texto, apenas para reaproveitar o mesmo pergaminho. No caso de Arquimedes, diversos textos de sua autoria foram apagados do pergaminho, que foi usado na Idade Média para escrever salmos e orações de um convento. Por essa razão, esses textos permaneceram ocultos por muito tempo.

O método de Arquimedes para encontrar o volume da esfera consiste em comparar três sólidos geométricos: o cone, o cilindro e a esfera. Esse método envolve um raciocínio que pode ser explicado pelo princípio de Cavalieri, embora tenha sido formulado por Arquimedes 1800 anos antes de ser enunciado por Cavalieri. Para comparar os volumes de esferas, cones e cilindros, ele imaginava a divisão desses sólidos em fatias e comparava suas massas em uma balança imaginária. Vamos ver abaixo uma versão do método de Arquimedes para relacionar os volumes da esfera, do cilindro e do cone.

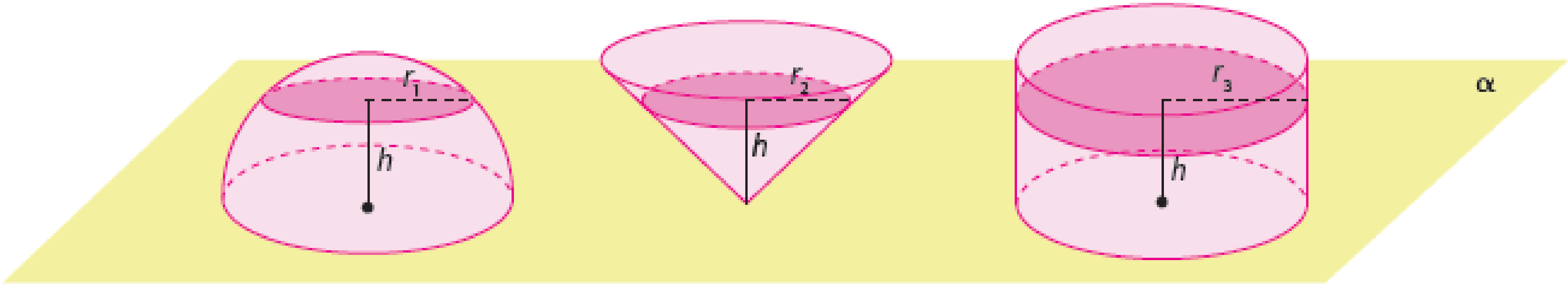
Considere uma semiesfera de raio r sobre um plano α. Vamos comparar seu volume com o de um cone reto de raio e altura iguais a r e vértice no plano α, como na figura, e também com o volume de um cilindro de raio e altura iguais a r.



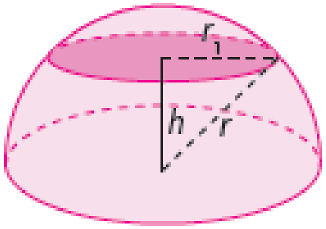
Imaginemos um plano β, paralelo a α, passando a uma altura h, $0 < h < r$, do plano α. Então, esse plano β produz secções circulares nos sólidos, as quais estão indicadas na cor rosa na figura abaixo.



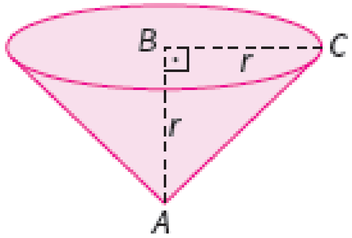
Vamos obter a expressão dos raios r_1, r_2 e r_3 dessas secções circulares em rosa.



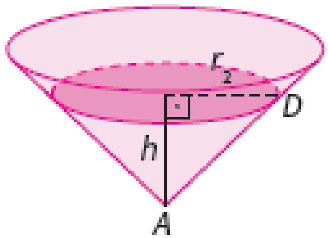
Na semiesfera, o raio da secção circular r_1 é igual à medida do cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa r e cateto h. Logo, a medida do raio da secção é $r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}$. Observe o desenho ao lado.



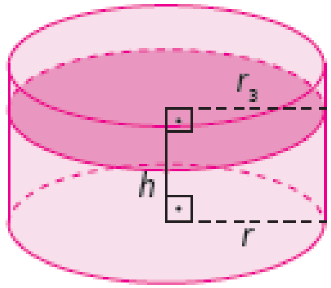
No cone, em que o raio da base tem a mesma medida que a altura, o triângulo ABC é retângulo em B e isósceles, com $AB = BC$. Veja ao lado.



Para qualquer altura h, o triângulo AED também é retângulo em E e isósceles, com $AE = ED$. Portanto, $r_2 = h$.



No cilindro, qualquer raio mede r; logo, o raio da secção circular é $r_3 = r$.



Portanto, as áreas dos três círculos podem ser calculadas assim:

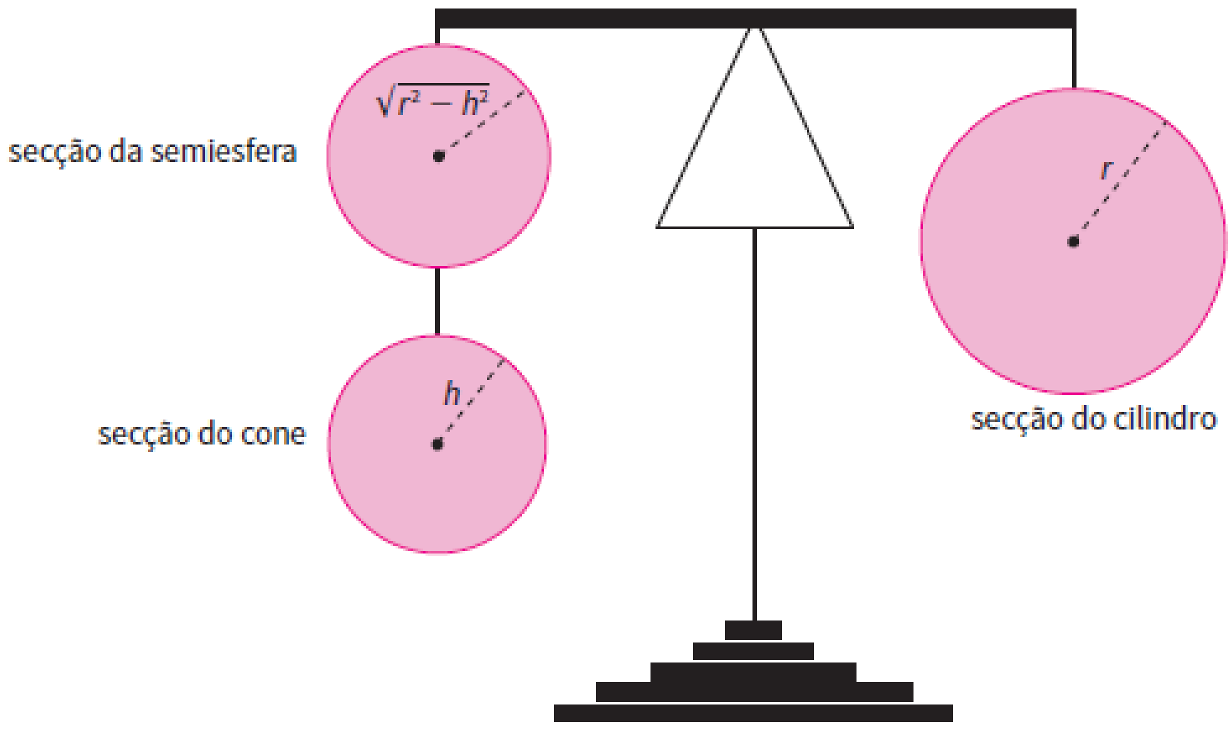
Área da secção da semiesfera $= \pi\left(\sqrt{r^2 - h^2}\right)^2 = \pi(r^2 - h^2) = \pi r^2 - \pi h^2$.

Área da secção do cone $= \pi h^2$.

Área da secção do cilindro $= \pi r^2$.

A área da secção da semiesfera equivale à área da secção do cilindro menos a área da secção do cone. Em outras palavras, a soma das áreas das secções do cone e da semiesfera é igual à área da secção do cilindro.

Se fossem cortadas fatias correspondentes a essas secções, haveria um equilíbrio. Observe a representação desse equilíbrio na figura abaixo.



Desse modo, utilizando o princípio de Cavalieri, podemos concluir que o volume do cilindro é igual à soma dos volumes da semiesfera e do cone.

Como o volume do cone é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro de mesma base e altura, então o volume da semiesfera seria igual a $\frac{2}{3}$ do volume do cilindro. Isso significa que, se o volume do cilindro de raio *r* e altura *r* é igual a $\pi r^2 \cdot r = \pi r^3$, então o volume do cone é igual a $\frac{1}{3}\pi r^3$ e o da semiesfera é igual a $\frac{2}{3}\pi r^3$. Conclui-se que o volume da esfera de raio *r* é igual ao dobro disso, ou seja, $\frac{4}{3}\pi r^3$.