

Capítulo 5

Uma Introdução ao Cálculo de Volumes

Para introduzir o conceito de volume, o professor deve, antes de qualquer tentativa de uma definição formal, apresentar uma idéia intuitiva e fornecer diversos exemplos para que os alunos possam compreender do que vai se falar. E qual é a primeira coisa que devemos dizer? Não nos ocorre nenhuma outra frase melhor que a seguinte:

Volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada.

Com esta idéia, inúmeras comparações provocativas podem ser feitas. Dadas duas caixas, qual delas tem maior volume? Quem tem maior volume: Maria ou Pedro? Observando uma panela pequena e uma garrafa, que objeto parece ter maior volume? Uma bola de futebol ou uma caixa de sapatos?

Muitas comparações são óbvias, outras não. No caso da panela e da garrafa, pode-se encher a garrafa com água e despejar dentro da panela. Para comparar volumes de objetos impermeáveis podemos mergulhá-los, um de cada vez, em um reservatório contendo água até o bordo e comparar a quantidade de água que transbordou. Se tivermos um reservatório cilíndrico de vidro, podemos colar em sua parede uma escala de nossa escolha e, com ela medir volumes de pequenos objetos impermeáveis, como uma pedra de formato irregular, por exemplo.

Este tipo de experiência é um elemento motivador para o estudo dos volumes e pode até ser eventualmente de alguma utilidade prática, mas na maioria dos problemas que teremos que enfrentar, é totalmente inútil. Por exemplo, o mestre de obras precisa

74 Temas e Problemas

saber o volume de concreto que será utilizado na construção das colunas, vigas e lajes de um edifício. A forma e as dimensões de cada um destes objetos estão na planta e o cálculo do volume deve ser feito antes que o edifício exista. Alguns objetos são pequenos demais, ou grandes demais, ou são inacessíveis ou, simplesmente, não existem concretamente. Sentimos então a necessidade de obter métodos para o cálculo de volumes, pelo menos de objetos simples, conhecendo sua forma e suas dimensões.

Para medir esta grandeza chamada volume, devemos compará-la com uma unidade e, tradicionalmente, a unidade de volume é o cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, denominado de cubo unitário. Por exemplo, se um cubo tem 1 cm de aresta, seu volume é a unidade chamada de *centímetro cúbico* (cm^3).

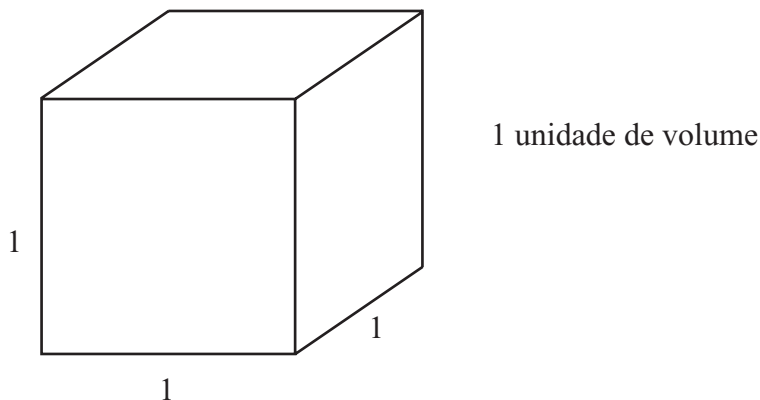


Figura 36

Assim, o volume de um sólido deve ser um número que exprima quantas vezes ele contém o cubo unitário. Esta é a idéia que devemos ter para desenvolver o estudo dos volumes mas, convenhamos que ainda tem um significado muito vago. Por exemplo, quantos cubos unitários de 1 cm de aresta cabem dentro de uma panela? Não saberíamos dizer. Entretanto, esta idéia inicial vai nos permitir calcular precisamente o volume de um paralelepípedo retângulo, ou simplesmente, um bloco retangular.

1 O volume do bloco retangular

Imaginemos inicialmente um bloco retangular com dimensões 4 cm, 3 cm e 2 cm. Qual é o seu volume?

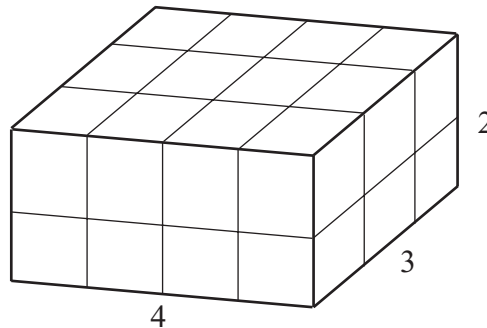


Figura 37

Observando o desenho, não há dúvida que este bloco pode ser dividido em $4 \times 3 \times 2 = 24$ cubos unitários e, portanto, seu volume é de 24 cm^3 . A maioria dos livros didáticos brasileiros usa um exemplo como este para “concluir” que o volume de um paralelepípedo retângulo qualquer é o produto de suas dimensões. Este chute é difícil de aceitar. O que ocorre se as dimensões do bloco não forem inteiras? Continua valendo o produto? Por que?

Está certo que em muitas ocasiões o professor não pode fazer em sala de aula uma demonstração completa de cada um dos conteúdos exigidos no programa do ensino médio. Mas, se não o fizer, deve oferecer algo mais que a fórmula pronta ou o decreto publicado no livro didático. Vejamos um exemplo.

Exemplo. Calcule o volume do bloco retangular de 5,6 cm de comprimento, 4,7 cm de largura e 2,0 cm de altura (Figura 38).

Para resolver este problema, dividamos cada aresta do cubo unitário (com 1 cm de aresta) em 10 partes iguais (Figura 39). Traçando pelos pontos de divisão planos paralelos às faces, dividimos esse cubo unitário em 1000 cubinhos de aresta $1/10$.

76 Temas e Problemas

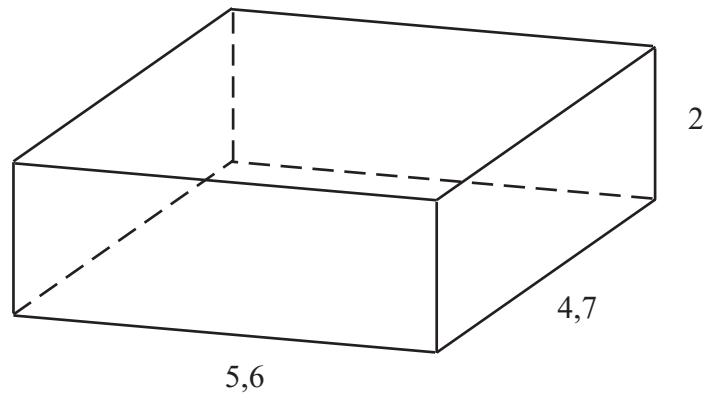


Figura 38

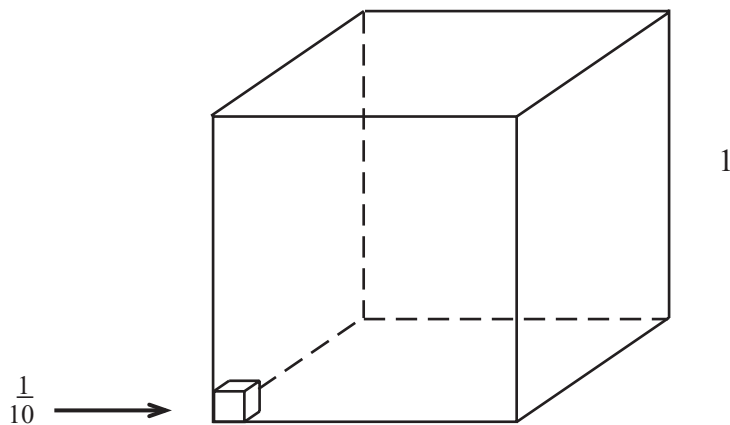


Figura 39

Naturalmente que o volume de cada cubinho é $v = 1/1000$, e é fácil contar quantos destes cubinhos enchem o bloco retangular dado: são $54 \times 47 \times 20$ cubinhos. Logo, o volume do bloco retangular é igual ao número de cubinhos multiplicado pelo volume de 1 cubinho, ou seja, $56 \times 47 \times 20 \times \frac{1}{1000} = 5,6 \times 4,7 \times 2,0$.

Este singelo exemplo confirma o produto das dimensões para o cálculo do volume do bloco retangular e contém a essência do que é necessário para a demonstração no caso em que as medidas das arestas são números racionais (veja o Problema 1 proposto no

final deste capítulo).

Para o caso geral, onde as medidas das arestas do bloco retangular são números reais positivos quaisquer, o volume é ainda o produto dessas medidas e, para demonstrar, usaremos o teorema fundamental da proporcionalidade. O roteiro para a demonstração está no Problema 2.

Consideremos portanto estabelecido que o volume de um bloco retangular cujas arestas medem x , y e z , é dado por $V = xyz$.

2 A definição do volume

Chamaremos de poliedro retangular a todo sólido formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos.

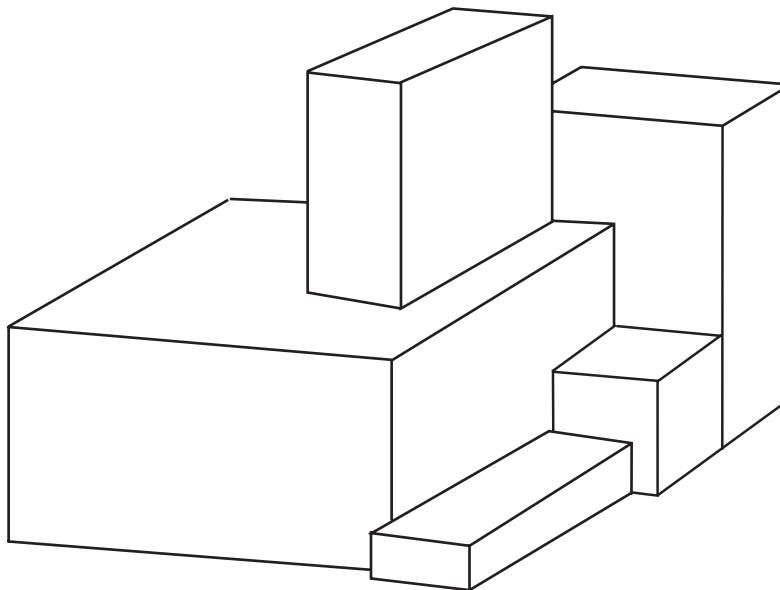


Figura 40

O volume de um poliedro retangular é a soma dos volumes dos blocos retangulares que o constituem. Vamos então definir o volume de um sólido S qualquer utilizando os poliedros retangulares contidos em S .

Seja V o volume de S e seja $v(P)$ o volume de um poliedro retangular P contido em S . O número V não é ainda conhecido mas deve satisfazer à condição $v(P) \leq V$ para todo poliedro retangular P contido em S . Para cada poliedro retangular P contido em S , mas não igual a S , é possível sempre obter um poliedro retangular P' , maior que P e ainda contido em S . Basta acrescentar a P novos blocos retangulares que ainda estejam dentro de S . Portanto, $v(P) < v(P') \leq V$, o que quer dizer que $v(P)$ é uma aproximação por falta para o volume de S e $v(P')$ é uma aproximação melhor para este resultado. Continuando este procedimento, obteremos aproximações cada vez melhores para o volume de S e essa idéia conduz à definição: $V = v(S)$ é um número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S (veja o Problema 3 para comentários sobre esta definição).

3 Sólidos semelhantes

Seja $B(x, y, z)$ um bloco retangular de dimensões x, y e z . Os blocos $B(x, y, z)$ e $B'(x', y', z')$ são *semelhantes* se, e somente se, $x' = kx$, $y' = ky$ e $z' = kz$ para algum número real positivo k , chamado *razão de semelhança* (ou fator de ampliação). Os volumes de B e B' são tais que $v(B') = kx \cdot ky \cdot kz = k^3 xyz = k^3 v(B)$, ou seja, multiplicando as arestas de B por k , seu volume ficou multiplicado por k^3 (Figura 41). Este resultado vale naturalmente para poliedros retangulares semelhantes P e P' , e levando em conta a definição de volume, vale também para dois sólidos semelhantes quaisquer:

A razão entre os volumes de sólidos semelhantes é o cubo da razão de semelhança.

Os argumentos acima não estão demonstrando este importantíssimo resultado. Eles estão apenas mostrando as idéias necessárias para a demonstração. Para realizá-la, o conceito de semelhança é fundamental e para conhecer ou rever este assunto, recomendamos a leitura do livro “Medida e Forma em Geometria” do prof. Elon Lages Lima (p. 33 e 55).

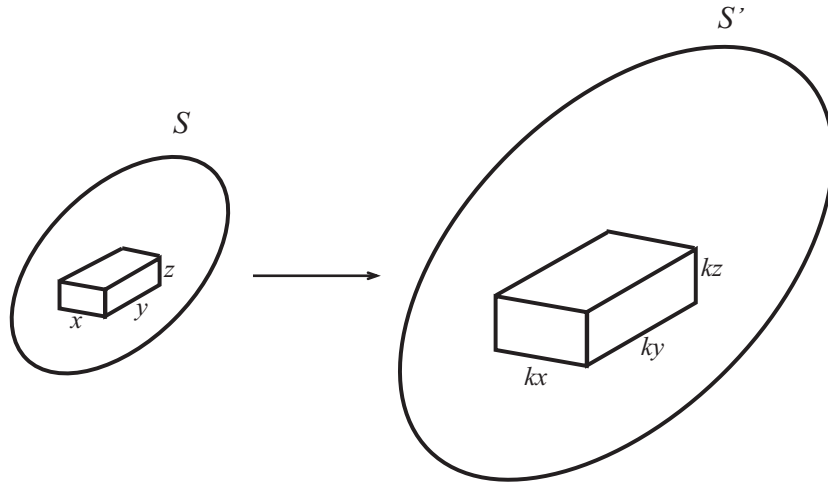


Figura 41

4 O Princípio de Cavalieri

O cálculo dos volumes dos diversos sólidos só vai avançar com esta nova ferramenta. Imagine inicialmente um sólido qualquer S apoiado em um plano horizontal H . Imagine também que S tenha sido cortado por planos paralelos a H em fatias muito finas, todas de mesma altura. Observe então que o sólido S pode mudar de forma quando deslizamos ligeiramente cada fatia em relação com a que está abaixo dela. Podemos assim obter um outro sólido S' , diferente de S , mas *com o mesmo volume* de S , uma vez que eles são constituídos das mesmas fatias (Figura 42).

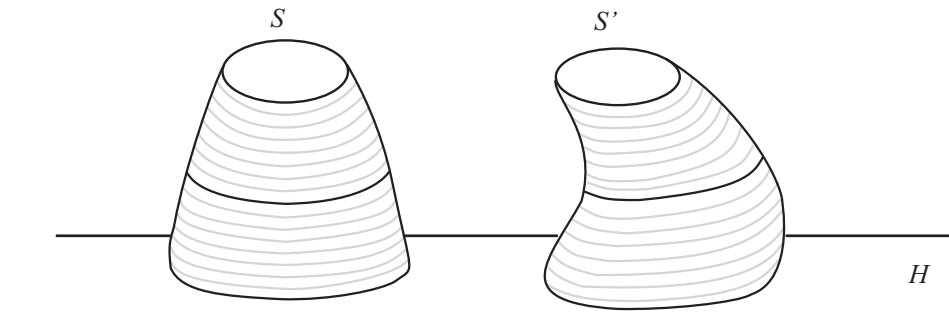


Figura 42

80 Temas e Problemas

Esta idéia inicial já nos conduz a dois importantes resultados.

- a) Dois prismas de mesma base e mesma altura têm mesmo volume (Figura 43).

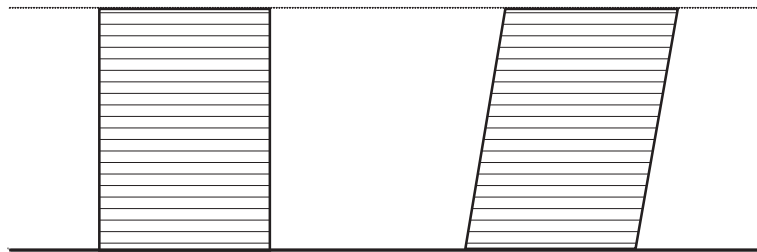


Figura 43

- b) Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem mesmo volume (Figura 44).

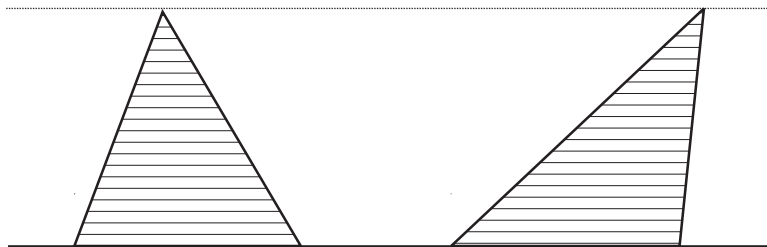


Figura 44

As situações que acabamos de apresentar constituem um caso bastante particular do princípio que vamos enunciar. Aqui, fatias que estão na mesma altura nos dois sólidos são congruentes. Mas, em uma situação mais geral, considerando dois sólidos quaisquer A e B (Figura 45), se as duas fatias que estiverem na mesma altura tiverem mesma área então, como possuem mesma espessura, terão muito aproximadamente volumes iguais. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas forem. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes das respectivas fatias, e a aproximação entre os volumes das fatias podendo tornar-se tão precisa quanto se deseje, concluímos que os volumes de A e B são iguais.

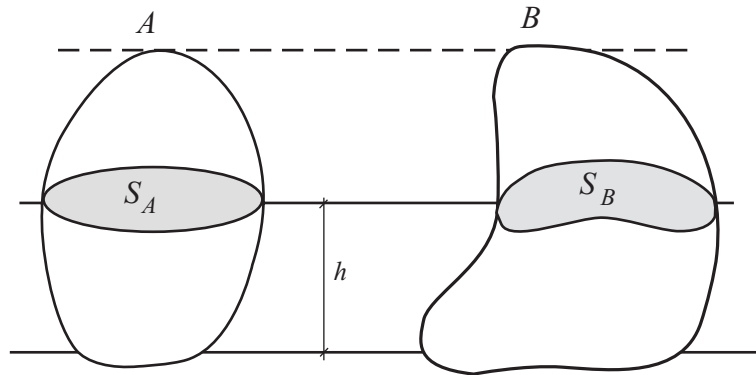


Figura 45

O **Princípio de Cavalieri** é enunciado da seguinte forma:

Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas de mesma área, então estes sólidos têm volumes iguais.

É preciso deixar claro ao leitor que o Princípio de Cavalieri não pode ser demonstrado com apenas os recursos da Matemática elementar. Ele deve ser incorporado à teoria como um axioma, mas os argumentos anteriores são bastante intuitivos e convincentes. Os exercícios que se seguem, complementam o texto, sugerem demonstrações e algumas aplicações.

5 Comentário final

Nos livros didáticos brasileiros, este assunto é apresentado, em geral, de forma bastante insatisfatória. Muitos sequer dizem o que significa calcular um volume e vários chutam, sem dó nem piedade, todas as fórmulas. Alguns citam o Princípio de Cavalieri, mas não o utilizam corretamente, e outros nem isto fazem. O importantíssimo conceito de semelhança não é abordado por nenhum deles e, por conseqüência, a teoria presente nesses livros é quase ininteligível.

Para referências adequadas ao professor do ensino médio recomendamos:

82 Temas e Problemas

- “Medida e Forma em Geometria” – Elon Lages Lima – SBM
- “A Matemática do Ensino Médio”, vol. 2 – 4 autores – SBM

Problemas Propostos*

1. Demonstre que o volume de um bloco retangular cujas medidas das arestas são números racionais é o produto das três dimensões.

Sugestão: Três números racionais sempre podem ser expressos como frações de mesmo denominador. Considere então como dimensões do bloco retangular os números a/d , b/d e c/d , e mostre que o volume é o produto dessas três dimensões.

2. Mostre que o volume de qualquer bloco retangular é o produto de suas dimensões.

Sugestão: Verifique que se duas dimensões do bloco ficam constantes, o volume é proporcional à terceira dimensão. Use o teorema fundamental da proporcionalidade (Capítulo 1 desde livro) para concluir o resultado.

3. Explique melhor a definição que demos para o volume V de um sólido qualquer S : $V = v(S)$ é o número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S .

4. Uma questão do vestibular da UFRJ era assim: desmanchando um brigadeiro (uma bola de massa de chocolate) de raio R , quantos brigadeiros de raio $R/2$ podemos formar?

5. Uma loja para turistas vende miniaturas da estátua do Cristo Redentor feitas em gesso, umas com 10 cm de altura e outras com 15 cm de altura. Se as menores pesam 120 g, cada uma, quanto pesam as maiores?

6. Demonstre que o volume de um prisma qualquer é o produto da área da base pela altura.

7. Divida um prisma triangular em três pirâmides triangulares de mesmo volume (Figura 46).

*Soluções na página 165.

84 Temas e Problemas

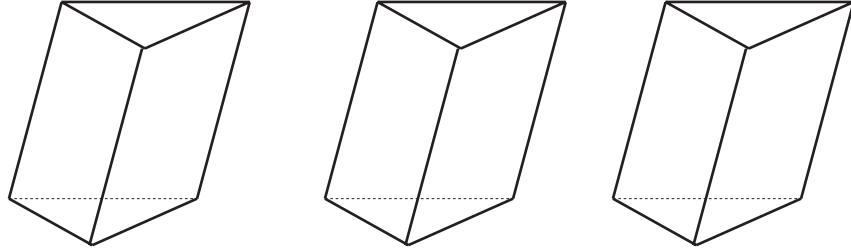


Figura 46

- 8.** Demonstre que o volume de qualquer pirâmide é a terça parte do produto da área da base pela altura.
- 9.** Por que o volume de um cilindro de base circular com raio R e altura h é $\pi R^2 h$?
- 10.** Calcule o volume de um cone com base circular de raio R e altura h .
- 11.** Mostre que o volume de um tronco de cone de altura h cujas bases são círculos de raios R e r é dado por $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$.
- 12.** Todos nós utilizamos freqüentemente dois tipos de copos plásticos descartáveis. Os maiores para água ou refrigerante e os menores para o café.
 - a) Observe os dois copos e dê um chute baseado apenas na intuição: quantas vezes o volume do copo grande é maior que o do copo pequeno?
 - b) Com uma régua, meça as dimensões dos copos, calcule os volumes e veja se a sua intuição estava próxima do resultado correto.
- 13.** Faça uma pesquisa nos livros que você dispõe e mostre como se pode calcular o volume de uma esfera de raio R .