Matemática financeira

44. Uma pessoa que durante 24 anos investiu mensalmente R$ 360,00 à taxa de 0,7% ao mês, mantendo-se essa taxa, poderá ter uma renda mensal vitalícia de:

a) R$ 1 324,30.

b) R$ 2 340,31.

c) R$ 3 240,13.

d) R$ 4 321,03.

44. $M = 360\left[\dfrac{(1 + 0{,}007)^{289} - 1}{0{,}007} - 1\right] = \text{R\$ } 334\,330{,}68$

Renda mensal vitalícia: $334330{,}68 \cdot 0{,}007 = \text{R\$ } 2340{,}31$

Resposta: alternativa **b**.

48. Um banco financia veículos com taxa de juros mensal de 1,85%.

a) Se um carro for comprado por R$ 28 000,00 em 48 parcelas fixas, sem entrada, qual será o valor de cada parcela?

b) Caso o valor de cada parcela seja investido todo mês em uma aplicação que renda 0,85% ao mês, qual é a diferença entre o montante final do investimento após 48 meses e o valor total a prazo a ser pago pelo veículo? Considere, nesse caso, que o veículo tenha mantido o mesmo preço.

48. a) $P = 28\,000\left(\dfrac{0{,}0185}{1 - (1 + 0{,}185)^{-48}}\right) = \text{R\$ }885{,}21$

b) $M = 885{,}21\left[\dfrac{(1 + 0{,}0085)^{48+1} - 1}{0{,}0085} - 1\right] = \text{R\$ }52\,641{,}55$

A diferença é de $52\,641{,}55 - 48 \cdot 885{,}21 = \text{R\$ }10\,151{,}47$.

50. Ao comprar um produto no valor de R$ 4 000,00, uma pessoa decide pagar de forma parcelada: uma entrada mais uma prestação, ambas no valor de R$ 2 050,00. Qual é a taxa mensal de juros aplicada?

50. $4000 - 2050 = 1950$

A taxa cobrada é de:

$$\frac{2050 - 1950}{1950} \cdot 100\% \simeq 5{,}13\%$$

A taxa mensal de juros aplicada foi de aproximadamente 5,13%.

52. (Unicamp-SP-2014) Um investidor dispõe de R$ 200,00 por mês para adquirir o maior número possível de ações de certa empresa. No primeiro mês, o preço de cada ação era R$ 9,00. No segundo mês, houve uma desvalorização e esse preço caiu para R$ 7,00. No terceiro mês, com o preço unitário das ações a R$ 8,00, o investidor resolveu vender o total de ações que possuía. Sabendo que só é permitida a negociação de um número inteiro de ações, podemos concluir que com a compra e venda de ações o investidor teve:

a) lucro de R$ 6,00.

b) nem lucro nem prejuízo.

c) prejuízo de R$ 6,00.

d) lucro de R$ 6,50.

52. O investidor pôde comprar no máximo 22 ações no primeiro mês. No segundo mês, porém, ele pôde comprar até 28 ações. Então, o investimento foi de $22 \cdot 9 + 28 \cdot 7 =$ R$ 394,00.

O dinheiro obtido com as vendas foi de $(22 + 28) \cdot 8 =$ R$ 400,00.

Portanto, o investidor teve lucro de $400 - 394 =$ R$ 6,00.

Resposta: alternativa **a**.

Probabilidade

O que é probabilidade

O estudo da probabilidade envolve observar os fenômenos ligados à incerteza; por exemplo, como saber que número sairá quando se joga um dado.

Há vários tipos de dados; o mais comum é o que apresenta seis faces e, em cada face, a representação de um dos números de 1 a 6.

O interesse da humanidade em prever eventos futuros estimulou o desenvolvimento de ferramentas para estudar os fenômenos aleatórios, que envolvem incerteza. O estudo das probabilidades permite, em muitos casos, determinar todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, que é aquele em que não podemos prever o resultado, como retirar uma carta do baralho ou lançar um dado.

Alea, em latim, significa "sorte", "jogo" ou mesmo "dado". Na Roma antiga, *aleatoris* era como se chamavam as casas de jogos, e *aleator* era o jogador de dados. Atribui-se ao imperador romano Júlio César (100 a.C.–44 a.C.) a célebre frase *Alea jacta est*, que significa "o dado está lançado" ou "a sorte está lançada". Quando ele ainda era general, em 49 a.C., uma lei proibia que generais com suas tropas atravessassem o rio Rubicão, visando impedir que grandes exércitos se aproximassem do núcleo do Império Romano. Ele teria dito a frase quando decidiu quebrar a lei e atravessar o rio, acompanhado de suas tropas, em direção a Roma. Ameaçando o poder estabelecido e tornando a guerra inevitável, Júlio César marchou sobre Roma e tornou-se o governante.

Até hoje a frase *Alea jacta est* é utilizada quando se deseja exprimir que uma decisão foi tomada e que, dali em diante, tudo dependerá da sorte.

O interesse humano em relação ao destino e à questão da sorte acabou gerando estudos matemáticos sobre os fenômenos aleatórios. E o foco inicial desses estudos foi justamente os chamados jogos de azar, que envolvem a aleatoriedade. Em determinados jogos, a estratégia a ser utilizada depende da consideração das probabilidades de ocorrerem determinados eventos, ou seja, do fator sorte. O primeiro estudo a respeito desse tema foi publicado no livro *Sobre jogos de azar*, de Girolamo Cardano (1501-1576).

Foi Cardano o primeiro a escrever sobre a teoria das probabilidades. Embora boa parte de seu livro seja composta de impressões suas sobre alguns jogos de azar, em particular jogos de dados, ele apresenta a discussão básica do conceito de probabilidades referente à ideia do espaço amostral.

Ao jogar um dado cúbico comum, podemos não saber que número ficará exposto na face de cima, mas sabemos que o conjunto de resultados possíveis será $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esse conjunto é o **espaço amostral**, e qualquer subconjunto do espaço amostral é um **evento**. Por exemplo, é um evento o fato de a face com o número 5 sair voltada para cima.

Segundo Cardano, se um experimento aleatório apresenta diversos resultados possíveis, todos com igual probabilidade de ocorrer, e alguns considerados favoráveis (que signifiquem ganhar), e outros desfavoráveis (que signifiquem perder), então a probabilidade de ganhar é igual à razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados. Ou seja, no caso do dado, em que o espaço amostral tem 6 resultados possíveis e com a mesma chance de ocorrer, e supondo que para ganhar precisemos obter um número específico, então a probabilidade de ganharmos será de $\frac{1}{6}$.

E qual é a probabilidade de saírem os números 2 ou 3 no lançamento de um dado? Supondo que o dado não seja viciado, isto é, que todas as faces tenham igual chance de ficarem voltadas para cima quando o dado parar sobre uma superfície plana, então o espaço amostral será $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O evento considerado será o subconjunto de S, que podemos chamar de $E = \{2, 3\}$. Se $n(E)$ for o número de elementos do subconjunto E e $n(S)$ for o número de elementos do conjunto S, então a probabilidade de ocorrer o evento E é:

$$\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Eventos impossíveis de acontecer têm probabilidade zero. Já eventos que ocorrem necessariamente têm probabilidade 1, pois, se o subconjunto *E* for igual ao conjunto do espaço amostral *S*, a probabilidade de ocorrer o evento *E* é $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$. Além disso, a probabilidade de não ocorrer um evento é igual a 1 menos a probabilidade de que ele ocorra.

A probabilidade de ocorrer um evento qualquer *E* é um número real entre 0 e 1 e pode ser expressa de três formas: como fração, como um número decimal ou como uma porcentagem. Por exemplo, a probabilidade de sair um número determinado no lançamento de um dado honesto pode ser representada dos seguintes modos: $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \simeq 16{,}7\%$.

O conjunto finito, não vazio, de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral S. Um subconjunto do espaço amostral é chamado de evento E. Se todos os elementos do conjunto do espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer, ou seja, se o espaço é equiprovável, então a probabilidade de ocorrer o evento E é dada pela razão entre o número de elementos de E, $n(E)$, e o número de elementos de S, $n(S)$, representada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

36. No lançamento simultâneo de dois dados honestos, qual é a probabilidade de que a soma dos números seja:

a) exatamente igual a 11?

b) maior que 8?

c) um número maior do que 8 e menor do que 11?

36. a) $p(E) = \dfrac{2}{36} \simeq 5{,}6\%$

b) $p(E) = \dfrac{10}{36} \simeq 27{,}8\%$

c) $p(E) = \dfrac{7}{36} \simeq 19{,}4\%$

37. Em uma urna estão todos os números de 4 algarismos que podem ser formados com 0, 2, 4, 6 e 8. Sorteando um número ao acaso, qual é a probabilidade de que ele seja múltiplo de 10?

37. $n(S) = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$

$n(E) = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 100$

$p(E) = \dfrac{100}{500} = 20\%$

38. Os nomes de quatro pessoas são colocados em uma urna e sorteados um a um, sem reposição. Qual é a probabilidade de que os nomes sejam sorteados em ordem alfabética?

38. $n(S) = 4! = 24$

$n(E) = 1$

$p(E) = \dfrac{1}{24} \simeq 4{,}2\%$

40. Uma prova tem 5 questões, todas com 2 alternativas: verdadeiro ou falso. Como João não sabia resolver as questões, “chutou” todas as respostas. Qual é a probabilidade de ele ter acertado todas elas?

40. $n(S) = 2^5 = 32$

$n(E) = 1$

$p(E) = \frac{1}{32} \simeq 3{,}1\%$

41. Hoje Cida receberá seu novo número de telefone. Ela já sabe os quatro primeiros dígitos, pois são o prefixo de todos os números de telefone de sua cidade. Mas e quanto aos outros quatro dígitos? Determine a probabilidade:

a) de serem todos pares e iguais entre si;

b) de serem todos primos e distintos entre si.

41. a) $n(S) = 10^4 = 1000$

$n(E) = 5$

$p(E) = \dfrac{5}{1000} = 0{,}5\%$

b) $n(S) = 10^4 = 1000$

$n(E) = 4! = 24$

$p(E) = \dfrac{24}{1000} = 2{,}4\%$