11

Sequências e séries Infinitas Parte 5

Representações de Funções como Séries de Potências

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela derivação ou integração de tais séries. Você pode estar se perguntando por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, para resolver as equações diferenciais e para aproximar funções por polinômios. (Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar as funções em calculadoras e computadores.)

Começaremos com uma equação que vimos antes:

1 $$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1}$$

Representações de Funções como Séries de Potências

Encontramos essa equação primeiro no Exemplo 6 da Seção 11.2, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1 - x)$ como uma soma de uma série de potências.

Representações de Funções como Séries de Potências

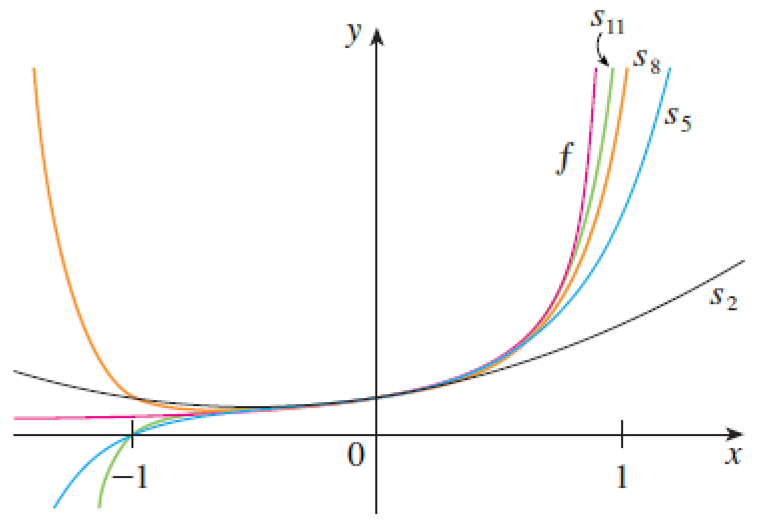
Uma ilustração geométrica da Equação 1 é mostrada na Figura 1. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

é a n-ésima soma parcial. Observe que à medida que n aumenta, $s_n(x)$ se torna uma aproximação cada vez melhor de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.



Representações de Funções como Séries de Potências

EXEMPLO 1 Expresse $1/(1 + x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO Trocando x por $-x^2$ na Equação 1, temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como essa é uma série geométrica, ela converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$. (É claro que poderíamos ter determinado o raio de convergência aplicando o Teste da Razão, mas todo aquele trabalho é desnecessário aqui.)

Representações de Funções como Séries de Potências

EXEMPLO 2 Encontre uma representação em série de potências para $1/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Para colocarmos essa função na forma do lado esquerdo da Equação 1, primeiro fatoramos um 2 do denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

A série converge quando $|-x/2| < 1$, isto é, $|x| < 2$. Assim, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Representações de Funções como Séries de Potências

EXEMPLO 3 Encontre uma representação em série de potências para $x^3/(x + 2)$.

SOLUÇÃO Como essa função é apenas x^3 vezes a função no Exemplo 2, tudo o que temos de fazer é multiplicar essa série por x^3:

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Outra maneira de escrever essa série é a seguinte:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como no Exemplo 2, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Derivação e integração de séries de potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder derivar e integrar tais funções, e o teorema a seguir (que não demonstraremos) diz que podemos fazer isso por derivação ou integração de cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado **derivação e integração termo a termo**.

Derivação e integração de séries de potências

$\boxed{2}$ **Teorema** Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

(i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

(ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

Derivação e integração de séries de potências

EXEMPLO 5 Expresse $1/(1-x)^2$ como uma série de potências pela derivação da Equação 1. Qual é o raio de convergência?

SOLUÇÃO Derivando cada lado da equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtemos
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Podemos trocar n por $n+1$ e escrever a resposta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acordo com o Teorema 2, o raio de convergência da série derivada é o mesmo que o raio de convergência da série original, a saber, $R = 1$.

Derivação e integração de séries de potências

EXEMPLO 6 Encontre uma representação em série de potências para $\ln(1 + x)$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Observamos que, a derivada desta função é $1/(1 + x)$. Da Equação 1 temos

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\ln\ (1 + x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 + \cdots)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinarmos o valor de C colocamos $x = 0$ nessa equação e obtemos $\ln(1 + 0) = C$.

Derivação e integração de séries de potências

Assim, $C = 0$ e

$$\ln(1 - x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

O raio de convergência é o mesmo que o da série original: $R = 1$.

Derivação e integração de séries de potências

EXEMPLO 7 Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \text{tg}^{-1}x$.

SOLUÇÃO Observamos que $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ e encontramos a série pedida pela integração da série de potências para $1/(1 + x^2)$ encontrada no Exemplo 1.

$$\text{tg}^{-1}x = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para encontrarmos C, colocamos $x = 0$ e obtemos $C = \text{tg}^{-1}\,0 = 0$. Portanto

$$\text{tg}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$$

Como o raio de convergência da série para $1/(1 + x^2)$ é 1, o raio de convergência dessa série para $\text{tg}^{-1}x$ é também 1.

Derivação e integração de séries de potências

A série de potência para $\mathrm{tg}^{-1}x$ obtida no Exemplo 7 é chamada *série de Gregory* devido ao matemático escocês James Gregory (1638-1675), que antecipou algumas das descobertas de Newton. Mostramos que a série de Gregory é válida quando $-1 < x < 1$, mas verifica-se (embora não seja fácil de provar) que também é válida quando $x = \pm 1$. Observe que quando $x = 1$ a série se toma

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Esse belo resultado é conhecido como a fórmula de Leibniz para π.

Séries de Taylor e Maclaurin

Na seção anterior pudemos encontrar representações para uma certa classe restrita de funções. Aqui investigaremos problemas mais gerais: Quais as funções que têm representações de séries de potências? Como podemos achar tais representações?

Começaremos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + c_4(x - a)^4 + \cdots \quad |x - a| < R$$

Vamos tentar determinar quais coeficientes c_n devem aparecer em termos de f. Para começar, observe que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos após o primeiro são 0 e obtermos

$$f(a) = c_0$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Pelo Teorema 11.9.2, podemos derivar a série na Equação 1 termo a termo:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora derivamos ambos os lados da Equação 2 e obtemos

Séries de Taylor e Maclaurin

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3. O resultado é

$$f''(a) = 2c_2$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da série na Equação 3 fornece

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 4 fornece

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Isolando o n-ésimo coeficiente c_n nessa equação, obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, demonstramos o teorema a seguir.

5 Teorema Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a, então ela deve ser da seguinte forma:

$$\boxed{6} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

A série na Equação 6 é chamada **série de Taylor da função f em a** (ou **em torno de a** ou **centrado em a**). Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$\boxed{7} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de **série de Maclaurin**.

Séries de Taylor e Maclaurin

EXEMPLO 1 Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto, a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para encontrarmos o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

de modo que, pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e o raio de convergência é $R = \infty$.

Séries de Taylor e Maclaurin

A conclusão que podemos tirar do Teorema 5 e do Exemplo 1 é que *se* e^x tiver uma expansão em série de potências em 0, então

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Assim, como determinar se e^x *tem* uma representação em série de potências?

Vamos investigar a questão mais geral: sob quais circunstâncias uma função é igual à soma de sua série de Taylor? Em outras palavras, se f tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Como com qualquer série convergente, isso significa que $f(x)$ é o limite da sequência das somas parciais. No caso da série de Taylor, as somas parciais são

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Séries de Taylor e Maclaurin

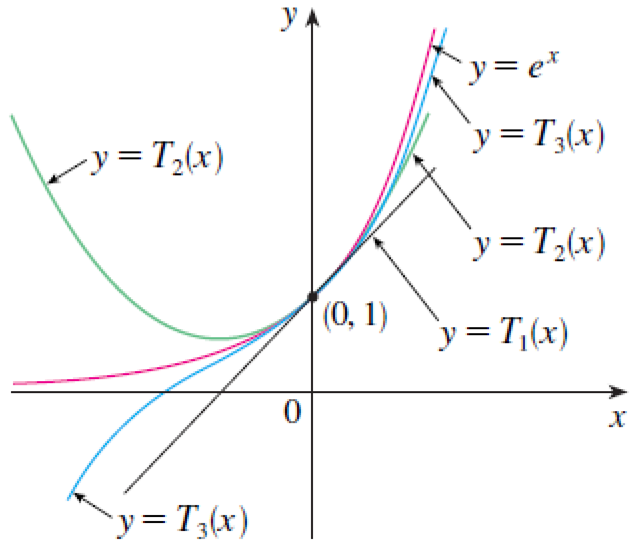


FIGURA 1

Quando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximar e^x na Figura 1. Isso sugere que e^x seja igual à soma de sua série de Taylor.

Séries de Taylor e Maclaurin

Observe que T_n é um polinômio de grau n chamado **polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a**. Por exemplo, para a função exponencial $f(x) = e^x$, o resultado do Exemplo 1 mostra que os polinômios de Taylor em 0 (ou polinômios de Maclaurin) com $n = 1, 2$ e 3 são

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Os gráficos da função exponencial e desses três polinômios de Taylor estão desenhados na Figura 1.

Em geral, $f(x)$ é a soma da sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

Se considerarmos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de modo que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

então, $R_n(x)$ é denominado **resto** da série de Taylor. Se pudermos de alguma maneira mostrar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, teremos mostrado que

$$\lim_{n \to \infty} T_n(x) = \lim_{n \to \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n \to \infty} R_n(x) = f(x)$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Assim, demonstramos o seguinte teorema:

8 Teorema Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de n-ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Ao tentarmos mostrar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para uma função específica f, geralmente usamos o teorema a seguir.

Séries de Taylor e Maclaurin

$\boxed{9}$ **Desigualdade de Taylor** Se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Para vermos por que isso é verdadeiro para $n = 1$, assumimos que $|f''(x)| \leqslant M$. Em particular, temos $f''(x) \leqslant M$, assim, para $a \leqslant x \leqslant a + d$ temos

$$\int_a^x f''(t)\, dt \leqslant \int_a^x M\, dt$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Fórmulas para o Termo Restante de Taylor

Como alternativas para a desigualdade de Taylor, temos as seguintes fórmulas para resto. Se $f^{(n+1)}$ for contínua sobre um intervalo I e $x \in I$, então

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Essa é chamada forma integral do resto. Outra fórmula, chamada forma de Lagrange para o resto, afirma que existe um número z entre x e a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Essa versão é uma extensão do Teorema do Valor Médio (que é o caso $n = 0$).

Séries de Taylor e Maclaurin

Ao aplicar os Teoremas 8 e 9, muitas vezes é útil usar o fato a seguir.

10

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Isso é verdade porque sabemos do Exemplo 1 que a série $\sum x^n/n!$ converge para todo x, e seu n-ésimo termo tende a 0.

Séries de Taylor e Maclaurin

EXEMPLO 2 Demonstre que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.

SOLUÇÃO Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo n. Se d é qualquer número positivo e $|x| \leqslant d$, então $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Assim, a Desigualdade de Taylor, com $a = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que a mesma constante $M = e^d$ serve para cada valor de n. Mas, pela Equação 10, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Decorre do Teorema do Confronto que $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x. Pelo Teorema 8, e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é

11 $$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Em particular, se colocarmos $x = 1$ na Equação 11, obteremos a seguinte expressão para o número e como a soma de uma série infinita:

12
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Em 1748 Leonhard Euler usou a Equação 12 para achar o valor correto de e até 23 algarismos. Em 2007 Shigeru Kondo, novamente usaram a série em $\boxed{12}$, e calcularam e com 12 bilhões de casas decimais.

Séries de Taylor e Maclaurin

EXEMPLO 4 Encontre a série de Maclaurin de sen x e demonstre que ela representa sen x para todo x.

SOLUÇÃO Arranjamos nossos cálculos em duas colunas como a seguir:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Como as derivadas se repetem em um ciclo de quatro, podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Como $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm$sen x ou $\pm$cos x, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para todo x. Assim, podemos tomar $M = 1$ na Desigualdade de Taylor:

$$\boxed{14} \qquad |R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pela Equação 10, o lado direito dessa desigualdade tende a 0 quando $n \to \infty$, dessa forma, $|R_n(x)| \to 0$ pelo Teorema do Confronto. Segue que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, assim, sen x é igual à soma de sua série de Maclaurin pelo Teorema 8.

Séries de Taylor e Maclaurin

A Figura 2 mostra o gráfico de $\operatorname{sen} x$ com seus polinômios de Taylor (ou Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que, quando n aumenta, $T_n(x)$ torna-se uma aproximação melhor para $\operatorname{sen} x$.

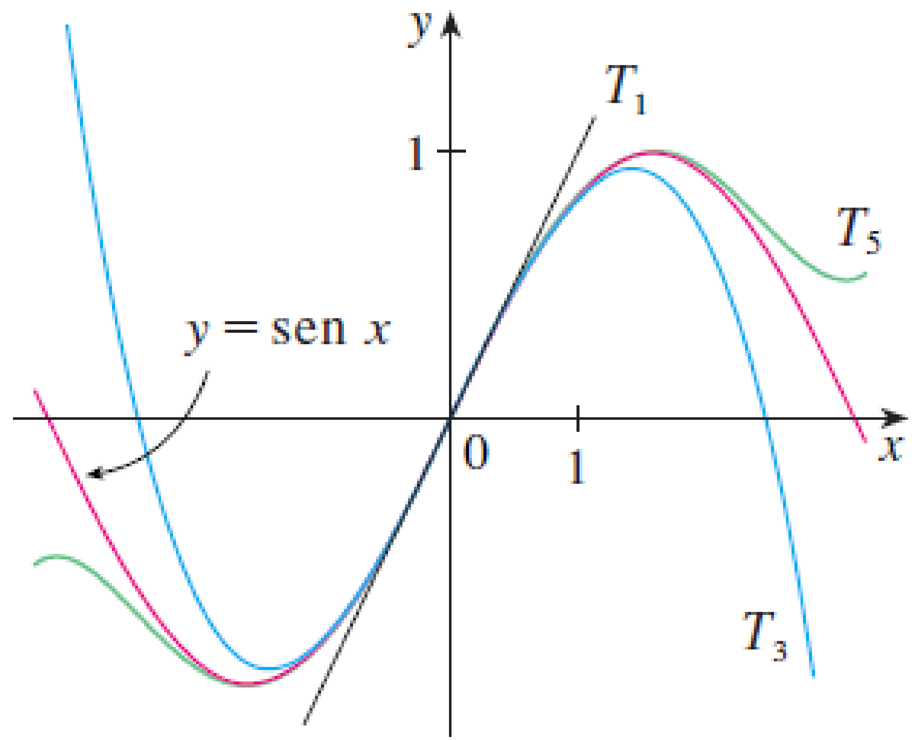


FIGURA 2

Séries de Taylor e Maclaurin

Destacamos o resultado do Exemplo 4 para referência futura.

15

$$\begin{aligned}\text{sen}\, x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para todo } x\end{aligned}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

EXEMPLO 5 Encontre a série de Maclaurin para cos x.

SOLUÇÃO Poderíamos proceder diretamente como no Exemplo 4, mas é mais fácil derivar a série de Maclaurin de sen x dada pela Equação 15:

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Como a série de Maclaurin de sen x converge para todo x, o Teorema 2 da Seção 11.9 nos diz que a série derivada para cos x também converge para todo x. Assim,

16

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para todo } x\end{aligned}}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

Listamos na tabela a seguir, para referência futura, algumas séries de Maclaurin importantes que deduzimos nesta seção e na precedente.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$