11

Sequências e séries Infinitas Parte 4

Séries – Testes de comparação

Nos testes de comparação, a ideia é comparar uma série dada com uma que sabemos ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos remete à série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é, portanto, convergente. Como a série $\boxed{1}$ é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Na verdade, é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

mostra que nossa série dada $\boxed{1}$ tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica).

Testes de comparação

Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Argumentação semelhante pode ser usada para demonstrar o seguinte teste, que se aplica apenas a séries cujos termos são positivos. A primeira parte diz que, se tivermos uma série cujos termos são *menores* que aqueles de uma série que sabemos ser *convergente*, então nossa série também será convergente. A segunda parte diz que, se começarmos com uma série cujos termos são *maiores* que aqueles de uma série que sabemos ser *divergente*, ela também será divergente.

Testes de comparação

O Teste de Comparação Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Como ambas as séries têm termos positivos, as sequências $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são crescentes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Também $t_n \to t$, portanto, $t_n \leqslant t$ para todo n. Como $a_i \leqslant b_i$, temos $s_n \leqslant t_n$. Assim, $s_n \leqslant t$ para todo n. Isso significa que $\{s_n\}$ é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo Teorema da Sequência Monótona. Por conseguinte, $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente, então $t_n \to \infty$ (porque $\{t_n\}$ é crescente). Mas $a_i \geqslant b_i$, assim, $s_n \geqslant t_n$. Então, $s_n \to \infty$. Portanto, $\sum a_n$ diverge.

Testes de comparação

O Teste de Comparação Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Como ambas as séries têm termos positivos, as sequências $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ são crescentes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Também $t_n \to t$, portanto, $t_n \leqslant t$ para todo n. Como $a_i \leqslant b_i$, temos $s_n \leqslant t_n$. Assim, $s_n \leqslant t$ para todo n. Isso significa que $\{s_n\}$ é crescente e limitada superiormente e, portanto, converge pelo Teorema da Sequência Monótona. Por conseguinte, $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente, então $t_n \to \infty$ (porque $\{t_n\}$ é crescente). Mas $a_i \geqslant b_i$, assim, $s_n \geqslant t_n$. Então, $s_n \to \infty$. Portanto, $\sum a_n$ diverge.

Testes de comparação

Ao usarmos o Teste de Comparação, devemos, é claro, ter algumas séries conhecidas $\sum b_n$ para o propósito de comparação. Na maior parte do tempo usamos uma destas séries:

- Uma série p [$\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$; veja (11.3.1)]
- Uma série geométrica [$\sum ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$

O Teste de Comparação de Limite Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Testes de comparação

EXEMPLO 1 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO Para um n grande, o termo dominante no denominador é $2n^2$, assim, comparamos a série dada com a série $\Sigma\, 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. (Na notação do Teste de Comparação, a_n é o lado esquerdo e b_n é o lado direito.) Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante vezes uma série p com $p = 2 > 1$. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

é convergente pela parte (i) do Teste de Comparação.

Teste da Razão

Dada qualquer série $\sum a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

1 Definição Uma série $\sum a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ for convergente.

Observe que, se $\sum a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e, assim, a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

Teste da Razão

3 Teorema Se uma série $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

DEMONSTRAÇÃO Observe que a desigualdade

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

é verdadeira porque $|a_n|$ é a_n ou $-a_n$. Se $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então $\sum |a_n|$ é convergente, assim $\sum 2|a_n|$ é convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, $\sum (a_n + |a_n|)$ é convergente. Então,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

é a diferença de duas séries convergentes e é, portanto, convergente. ∎

Teste da Razão

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

O Teste da Razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$.

Teste da Razão

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

O Teste da Razão

(i) Se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$.

Teste da Razão

EXEMPLO 4 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ quanto à convergência absoluta.

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}} \right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto, convergente.

Séries de Potências

Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas **coeficientes** da série. Para cada x fixado, a série $\boxed{1}$ é uma série de constantes que podemos testar quanto a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio. A única diferença é que f tem infinitos termos.

Por exemplo, se tomarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geqslant 1$

Séries de Potências

Em geral, a série da forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

é chamada uma **série de potências em** $(x - a)$ ou uma **série de potências centrada em** $\boldsymbol{a}$ ou uma **série de potências em torno de** $\boldsymbol{a}$. Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$ nas Equações 1 e 2, adotamos a convenção de que $(x - a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Observe também que, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geqslant 1$ e assim a série de potências $\boxed{2}$ sempre converge quando $x = a$.

Séries de Potências

3 **Teorema** Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$, existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

O número R no caso (iii) é chamado **raio de convergência** da série de potências.

Séries de Potências

EXEMPLO 1 Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ é convergente?

SOLUÇÃO Usamos o Teste da Razão. Se fizermos a_n, como habitualmente, denotar o n-ésimo termo da série, então $a_n = n!x^n$. Se $x \neq 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Pelo Teste da Razão, a série diverge quando $x \neq 0$. Então, a série dada converge apenas quando $x = 0$.