11

Sequências e séries Infinitas Parte 3

Séries - Teste da Integral

Começamos investigando as séries cujos termos são os recíprocos dos quadrados de inteiros positivos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Não existe uma fórmula simples para a soma s_n dos primeiros termos n, mas a tabela de valores aproximados gerada por computador dada na margem sugere que as somas parciais estão se aproximando de um número próximo de 1,64 quando $n \to \infty$ e, assim, parece que a série é convergente.

Teste da Integral

Podemos confirmar essa impressão com um argumento geométrico. A Figura 1 mostra a curva $y = 1/x^2$ e retângulos colocados abaixo dela. A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1; a altura é igual ao valor da função $y = 1/x^2$ na extremidade direita do intervalo.

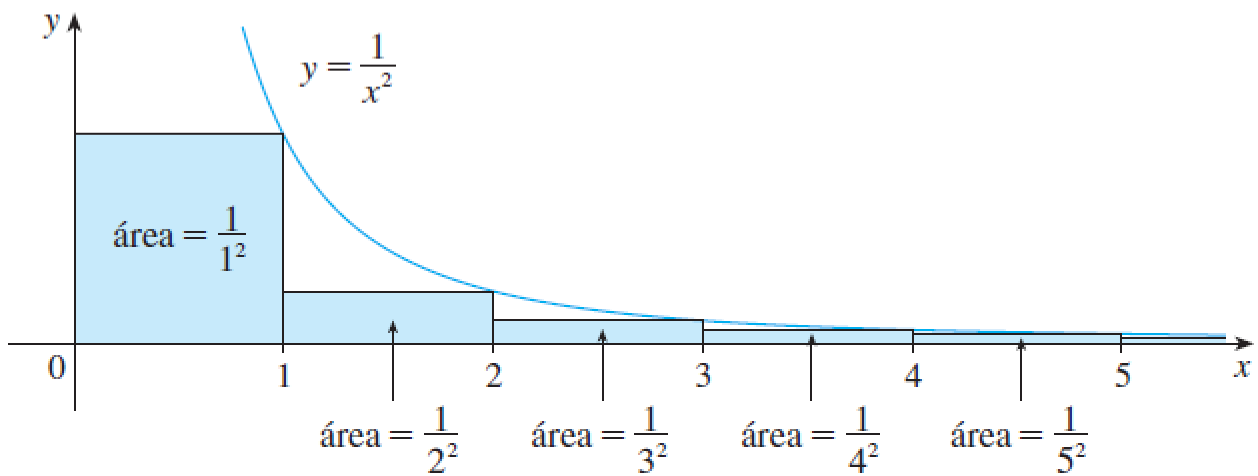

FIGURA 1

Teste da Integral

Dessa forma, a soma das áreas dos retângulos é

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Se excluirmos o primeiro retângulo, a área total dos retângulos remanescentes será menor que a área sob a curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que é o valor da integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Na Seção 7.8, no Volume I, descobrimos que essa integral imprópria é convergente e tem valor 1. Assim, a figura mostra que todas as somas parciais são menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Teste da Integral

Então, as somas parciais são limitadas. Também sabemos que as somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Portanto, as somas parciais convergem (pelo Teorema da Sequência Monótona) e, dessa maneira, a série é convergente. A soma da série (o limite das somas parciais) é também menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

A soma exata dessa série encontrada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) é $\pi^2/6$, mas a demonstração desse fato é muito difícil.

Teste da Integral

O Teste da Integral Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Teste da Integral

EXEMPLO 1 Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ quanto à convergência ou divergência.

SOLUÇÃO A função $f(x) = 1/(x^2+1)$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e assim usamos o Teste da Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{tg}^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Então, $\int_1^{\infty} 1/(x^2+1)\,dx$ é uma integral convergente e, dessa forma, pelo Teste da Integral, a série $\sum 1/(n^2+1)$ é convergente.

Teste da Integral

EXEMPLO 2 Para que valores de p a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente?

SOLUÇÃO Se $p < 0$, então $\lim_{n \to \infty} (1/n^p) = \infty$. Se $p = 0$, então $\lim_{n \to \infty} (1/n^p) = 1$. Em qualquer dos dois casos, $\lim_{n \to \infty} (1/n^p) \neq 0$, e, assim, a série dada diverge pelo Teste de Divergência (11.2.7).

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é claramente contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Encontramos no Capítulo 7, [veja (7.8.2, no Volume I)] que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \text{ é convergente se } p > 1 \text{ e divergente se } p \leqslant 1$$

Segue do Teste da Integral que a série $\Sigma\, 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leqslant 1$.

Teste da Integral

A série no Exemplo 2 é chamada **série p**. É importante para o restante deste capítulo; desse modo, resumimos os resultados do Exemplo 2 para referência futura como a seguir.

1 A série p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

EXEMPLO 3

(a) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma série p com $p = 3 > 1$.

Teste da Integral

(b) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

é divergente porque ela é uma série p com $p = \frac{1}{3} < 1$.

Teste da Integral

EXEMPLO 4 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO A função $f(x) = (\ln x)/x$ é positiva e contínua para $x > 1$ porque a função logaritmo é contínua. Mas não é óbvio se f é decrescente ou não; assim, calculamos sua derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Então $f'(x) < 0$ quando $\ln x > 1$, isto é, $x > e$. Segue que f é decrescente quando $x > e$ e podemos aplicar o Teste da Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Como essa integral imprópria é divergente, a série $\Sigma\,(\ln n)/n$ também é divergente pelo Teste da Integral.