11

Sequências e séries Infinitas Parte 2

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

Séries

Em geral, se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma

$$\boxed{1} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n$$

Faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos?

Séries

Consideramos as **somas parciais**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

e, em geral,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência $\{s_n\}$, que pode ou não ter um limite. Se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo anterior, o chamamos soma da série infinita $\Sigma\, a_n$.

Séries

2 Definição Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Séries

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo, quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Compare com a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} f(x)\,dx$$

Para encontrarmos essa integral, integramos de 1 até t e então fazemos $t \to \infty$. Para uma série, somamos de 1 a n e então fazemos $n \to \infty$.

Séries

EXEMPLO 1 Suponhamos que se saiba que a soma dos primeiros n termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n + 5}$$

Em seguida, a soma da série é o limite da sequência $\{s_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{3n + 5} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3 + \dfrac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$

No Exemplo 1 foi nos *dada* uma expressão para a soma dos primeiros termos n, mas geralmente não é fácil *encontrar* tal expressão. No Exemplo 2, no entanto, olhamos para uma famosa série para a qual *podemos* encontrar uma fórmula explícita para s_n.

Séries

EXEMPLO 2 Um exemplo importante de uma série infinita é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada termo é obtido a partir do anterior, multiplicando-se pela **razão comum** r. (Já consideramos o caso especial onde $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$).

Se $r = 1$, então $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe, a série geométrica diverge nesse caso.

Se $r \neq 1$, temos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Subtraindo essas equações, obtemos

Séries

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

3
$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Se $-1 < r < 1$, sabemos, a partir de (11.1.9), que $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Então, quando $|r| < 1$, a série geométrica é convergente, e sua soma é $a/(1 - r)$.

Se $r \leqslant -1$ ou $r > 1$, a sequência $\{r^n\}$ é divergente por (11.1.9); assim, pela Equação 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existe. Portanto, a série geométrica diverge naqueles casos.

11.1.9:

9 A sequência $\{r^n\}$ é convergente se $-1 < r \leqslant 1$ e divergente para todos os outros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Séries

Resumimos os resultados do Exemplo 2 como a seguir.

4 A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Se $|r| \geqslant 1$, a série geométrica é divergente.

Séries

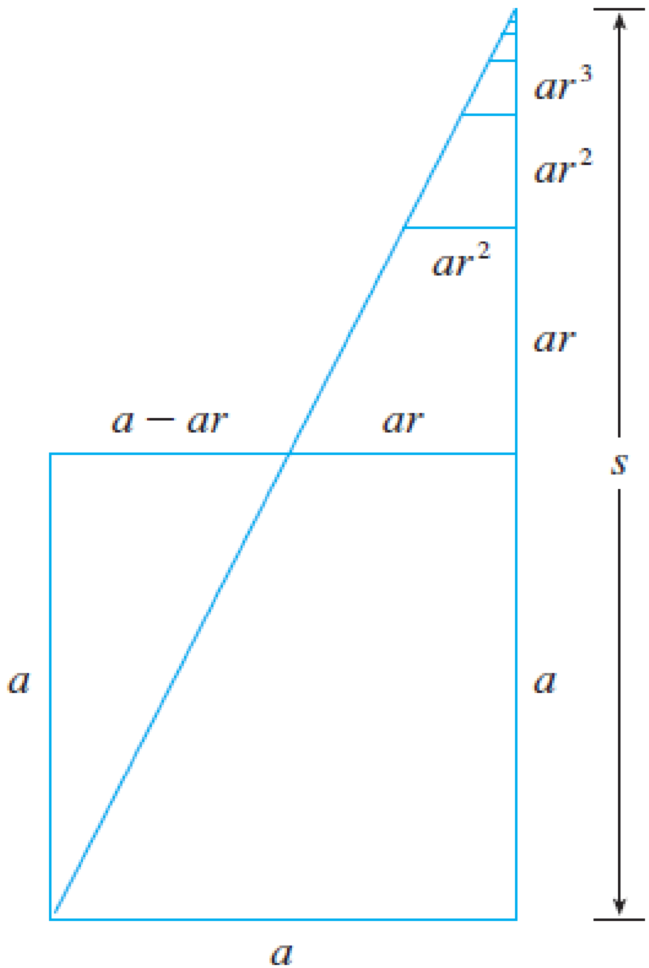

FIGURA 1

A Figura 1 fornece uma demonstração geométrica do resultado no Exemplo 2. Se os triângulos forem construídos como mostrado e s for a soma da série, então, por semelhança de triângulos,

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \qquad \text{logo} \qquad s = \frac{a}{1 - r}$$

Séries

EXEMPLO 3 Encontre a soma da série geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUÇÃO O primeiro termo é $a = 5$ e a razão comum é $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente por $\boxed{4}$ e sua soma é

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

Séries

O que realmente queremos dizer quando afirmamos que a soma da série no Exemplo 3 é 3? Claro, não podemos somar literalmente um número infinito de termos, um a um. Mas, de acordo com a Definição 2, a soma total é o limite da sequência de somas parciais. Então, fazendo a soma de um número suficiente de termos, podemos chegar tão próximo quanto gostaríamos do número. A tabela mostra as primeiras dez somas parciais e o gráfico da Figura 2 mostra como a sequência de somas parciais se aproxima de 3.

Séries

n	s_n
1	5,000000
2	1,666667
3	3,888889
4	2,407407
5	3,395062
6	2,736626
7	3,175583
8	2,882945
9	3,078037
10	2,947975

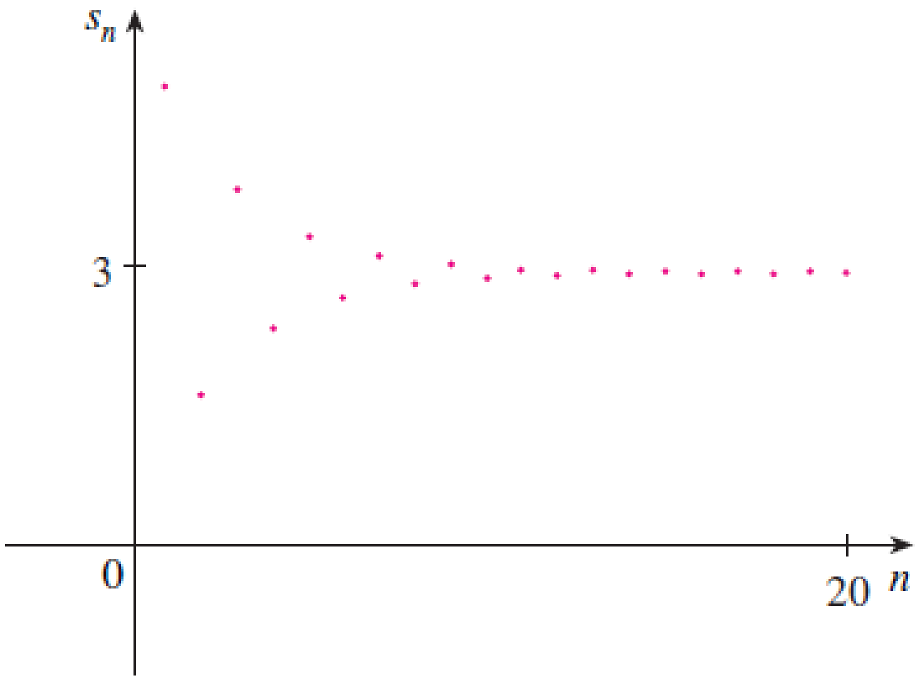

FIGURA 2

Séries

EXEMPLO 4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ é convergente ou divergente?

SOLUÇÃO Vamos reescrever o termo n-ésimo termo da série na forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Outra maneira de identificar a e r é escrever os primeiros termos:

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

Reconhecemos essa série como uma série geométrica com $a = 4$ e $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, a série diverge por $\boxed{4}$.

Séries

EXEMPLO 6 Encontre a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ onde $|x| < 1$.

SOLUÇÃO Observe que esta série começa com $n = 0$, de modo que o primeiro termo é $x^0 = 1$. (Com a série, adotamos a convenção de que $x^0 = 1$ mesmo quando $x = 0$.) Assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Esta é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Uma vez que $|r| = |x| < 1$, que converge e $\boxed{4}$ resulta em

$$\boxed{5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

Séries

6 Teorema Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\Sigma\, a_n$ é convergente, a sequência $\{s_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n \to \infty} s_{n-1} = s$. Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} a_n &= \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 1 Com qualquer *série* $\Sigma\, a_n$ associamos duas *sequências*: a sequência $\{s_n\}$ de suas somas parciais e a sequência $\{a_n\}$ de seus termos. Se $\Sigma\, a_n$ for convergente, o limite da sequência $\{s_n\}$ é s (a soma da série) e, como o Teorema 6 afirma, o limite da sequência $\{a_n\}$ é 0.

OBSERVAÇÃO 2 A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira, em geral. Se $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, não podemos concluir que $\Sigma\, a_n$ é convergente.

Séries

7 Teste de Divergência Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

O Teste para Divergência vem do Teorema 6, porque, se a série não for divergente, ela é convergente e, assim, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 9 Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Desse modo, a série diverge pelo Teste para Divergência.

OBSERVAÇÃO 3 Se descobrirmos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, saberemos que $\sum a_n$ é divergente. Se acharmos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não saberemos sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$. Lembre-se o aviso na Observação 2: se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir.