# 11

# Sequências e séries infinitas

# Sequências

Pode-se pensar numa **sequência** como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

O número $a_1$ é chamado *primeiro termo*, $a_2$ é o *segundo termo* e, em geral, $a_n$ é o *n-ésimo termo*. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo $a_n$ terá um sucessor $a_{n+1}$.

Observe que, para cada inteiro positivo $n$ existe um número correspondente $a_n$ e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos $a_n$ em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número $n$.

**NOTAÇÃO** A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também indicada por

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

# Sequências

**EXEMPLO 1** Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o $n$-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

# Sequências

**EXEMPLO 1** Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o $n$-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{ \qquad \right\}$

# Sequências

**EXEMPLO 1** Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o $n$-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots, \dfrac{n}{n+1}, \dots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\quad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \dots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \dots\right\}$

# Sequências

**EXEMPLO 1** Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o $n$-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\{\qquad\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \qquad , \; n \geqslant 3$ $\quad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \qquad \ldots\}$

# Sequências

**EXEMPLO 1** Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o $n$-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\,\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\quad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\quad \left\{ \qquad\qquad \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

# Sequências

**EXEMPLO 1** Algumas sequências podem ser definidas dando uma fórmula para o $n$-ésimo termo. Nos exemplos seguintes, damos três descrições da sequência: uma usando a notação anterior, outra empregando a fórmula da definição e uma terceira escrevendo os termos da sequência. Observe que não é necessário começar em 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad a_n = \dfrac{n}{n+1} \qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\} \quad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \quad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty} \qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3 \ \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

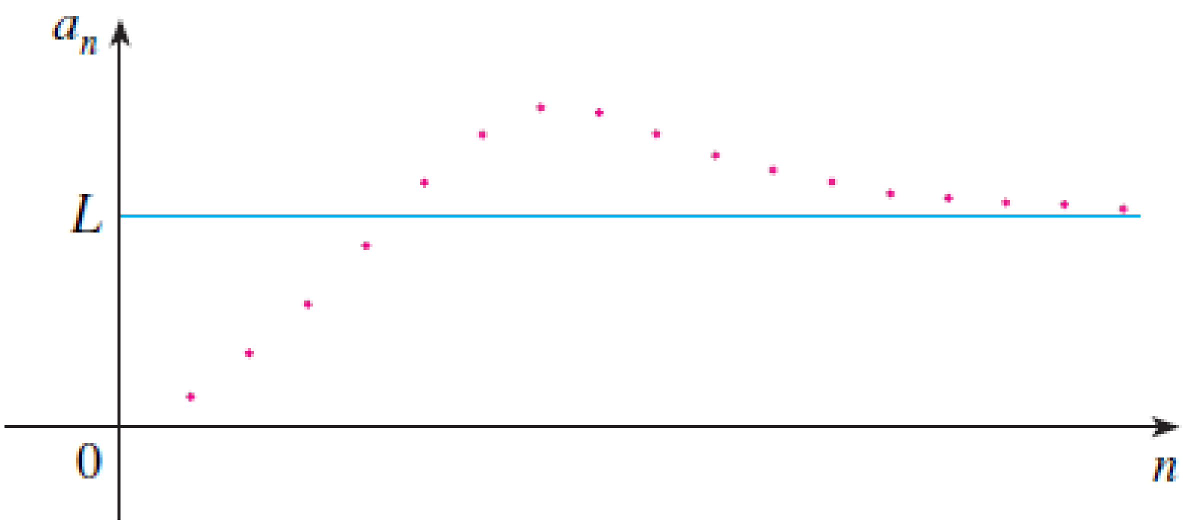
(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0 \ \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

# Sequências

**1 Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ tem **limite** $L$ e escrevemos

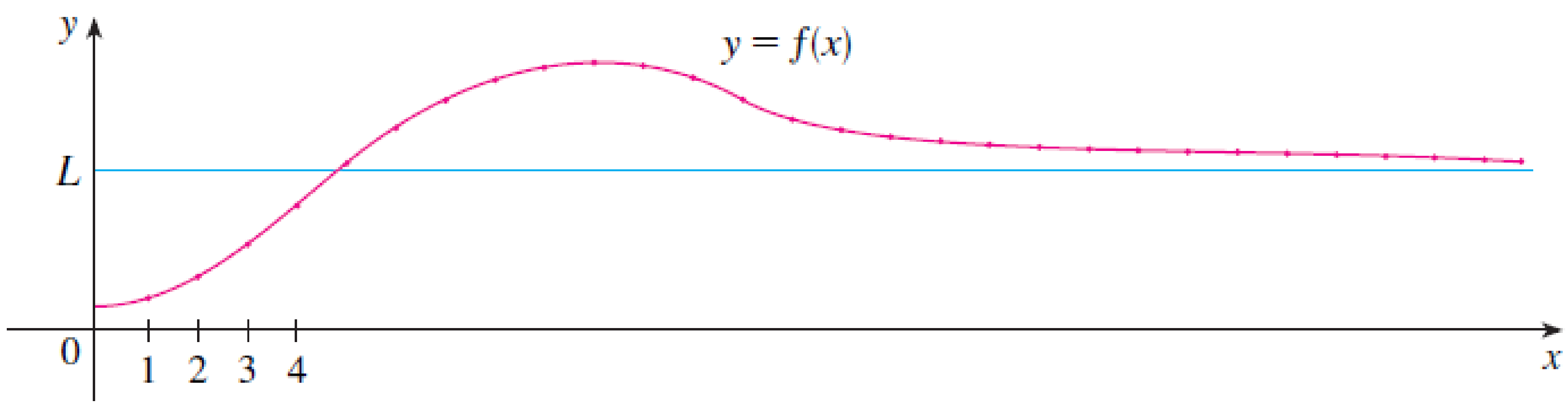
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se pudermos tornar os termos $a_n$ tão próximos de $L$ quanto quisermos ao fazer $n$ suficientemente grande. Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).



# Sequências

$\boxed{3}$ **Teorema** Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando $n$ é um inteiro, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.



# Sequências

**EXEMPLO** A sequência $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ é convergente ou divergente?

**SOLUÇÃO** Observe que numerador e denominador se aproximam do infinito quando $n \to \infty$. Não podemos empregar a Regra de l'Hôspital diretamente, porque ela não se aplica a sequências, mas, sim, a funções de uma variável real. Contudo, podemos usar a Regra de l'Hôspital para a função relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ e obter

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Temos, portanto, pelo Teorema 3,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Então $\{a_n\}$ é convergente

# Sequências

**10 Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$. Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

**11 Definição** Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número $M$ tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número $m$ tal que

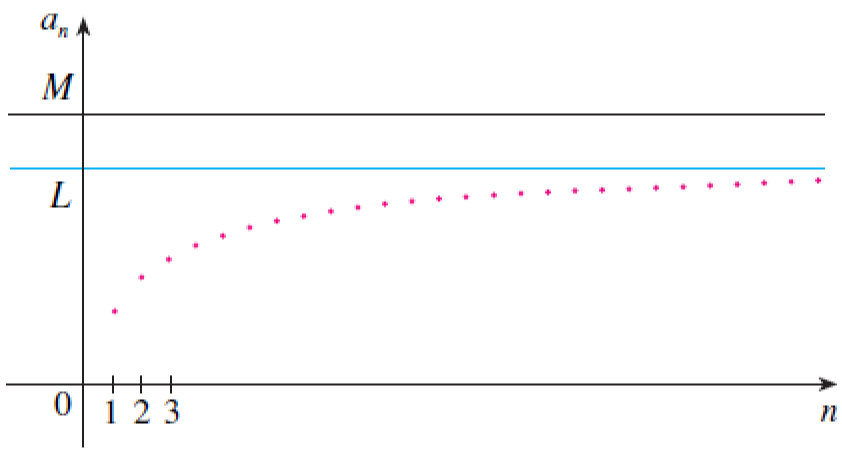
$$m \leqslant a_n \qquad \text{para todo } n \geqslant 1$$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

**12 Teorema da Sequência Monótona** Toda sequência monótona limitada é convergente.

# Sequências

**12 Teorema da Sequência Monótona** Toda sequência monótona limitada é convergente.




Se $\{a_n\}$ está aumentando e $a_n \leqslant M$ para todo $n$, então os termos são forçados a se aglomerar e a se aproximar de algum número $L$.