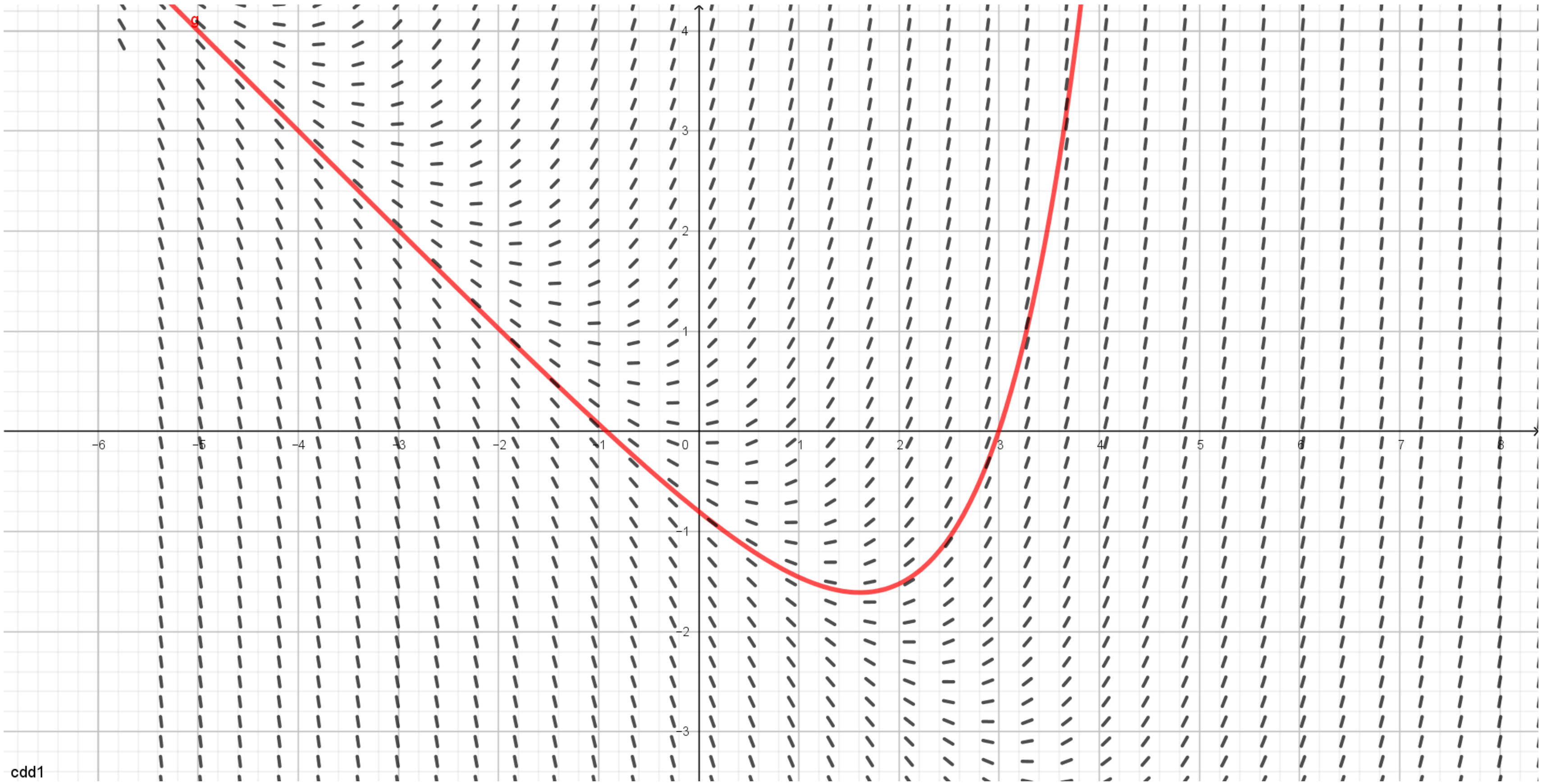
9

Equações diferenciais gerais Parte 2

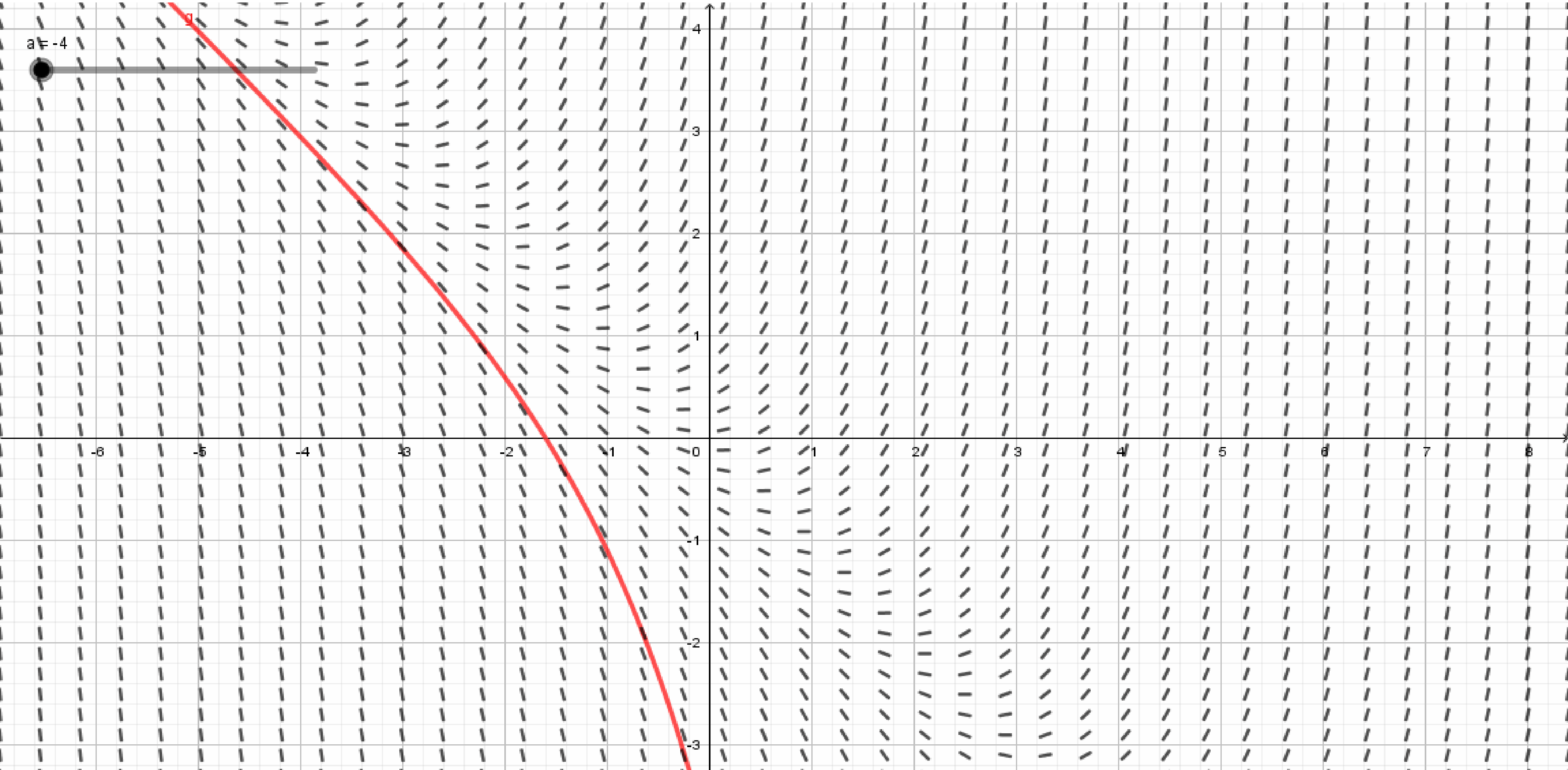
Campos de direções

Uma solução da equação $y' = x + y$.



Campos de direções

Soluções da equação $y' = x + y$ para alguns valores de y.



Lei de crescimento natural

Um dos modelos para o crescimento populacional que consideramos na Seção 9.1 baseava--se na suposição de que a população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Essa é uma hipótese razoável? Suponha que tenhamos uma população (de bactérias, por exemplo) com tamanho $P = 1\,000$ e que, em certo instante, esteja crescendo a uma taxa de $P' = 300$ bactérias por hora. Agora, tomemos outras 1 000 bactérias do mesmo tipo, colocando-as com a primeira população. Cada metade da nova população cresce a uma taxa de 300 bactérias por hora. Seria razoável esperar que a população total de 2 000 aumentasse a uma taxa de 600 bactérias por hora inicialmente (desde que houvesse espaço e nutrientes suficientes). Assim, se dobrarmos o tamanho, dobraremos a taxa de crescimento. Parece possível que a taxa de crescimento seja proporcional ao tamanho.

Lei de crescimento natural

Em geral, se $P(t)$ for o valor de uma quantidade y no tempo t, e se a taxa de variação de P com relação a t for proporcional a seu tamanho $P(t)$ em qualquer tempo, então

1
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é algumas vezes chamada **lei do crescimento natural**. Se k for positivo, então a população aumenta; se k for negativo, ela diminui.

Lei de crescimento natural

Como a Equação 1 é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la pelo método da Seção 9.3:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

onde A ($= \pm e^C$ ou 0) é uma constante arbitrária. Para percebermos o significado da constante A, observamos que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Lei de crescimento natural

Portanto, A é o valor inicial da função.

2 A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

é

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Outra maneira de escrever a Equação 1 é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

que diz que a **taxa de crescimento relativa** (a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população) é constante. Então, $\boxed{2}$ diz que a população com uma taxa de crescimento relativa constante deve crescer exponencialmente.

Lei de crescimento natural

Podemos levar em conta a emigração (ou a remoção) de uma população modificando a Equação 1: se a taxa de emigração for uma constante m, então a taxa de mudança da população é modelada pela equação diferencial

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP - m$$

Veja o Exercício 15 para a solução e consequências da Equação 3.

Exercício

p. 556

15. Considere a população $P = P(t)$ com taxas de natalidade e mortalidade relativas constantes α e β, respectivamente, e uma taxa de emigração constante m, onde α, β e m são constantes positivas. Suponha que $\alpha > \beta$. Então, a taxa de variação da população no instante t é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{onde } k = \alpha - \beta$$

(a) Encontre a solução desta equação que satisfaça a condição inicial $P(0) = P_0$.

(b) Que condições sobre m levarão a uma expansão exponencial da população?

(c) Que condições sobre m resultarão em uma população constante? E em um declínio da população?

(d) Em 1847, a população da Irlanda era de cerca de 8 milhões e a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade relativas era 1,6 % da população. Por causa da fome da batata nas décadas de 1840 e 1850, cerca de 210 000 habitantes por ano emigraram da Irlanda. A população estava crescendo ou decrescendo naquela época?

Exercícios p. 537

3–6 Ligue a equação diferencial a seu campo de direções (I–IV). Dê as razões para sua resposta.

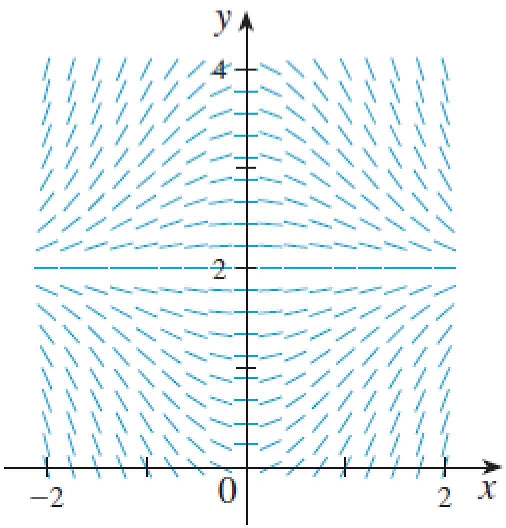
3. $y' = 2 - y$

4. $y' = x(2 - y)$

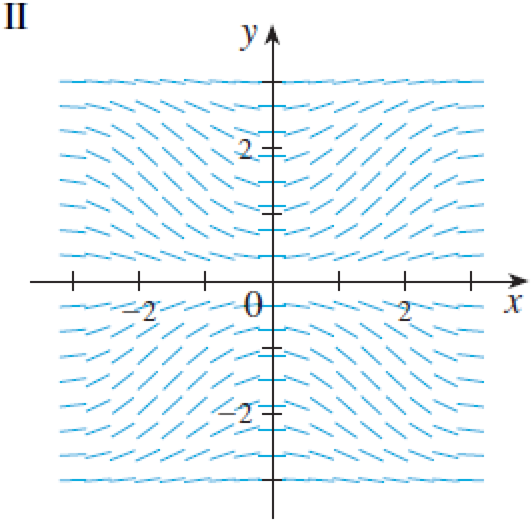
5. $y' = x + y - 1$

6. $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

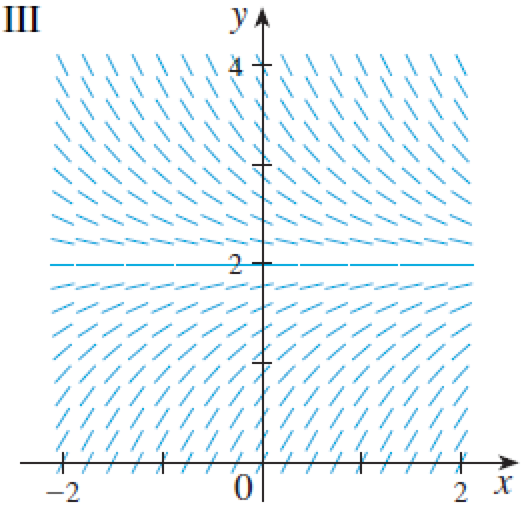
I



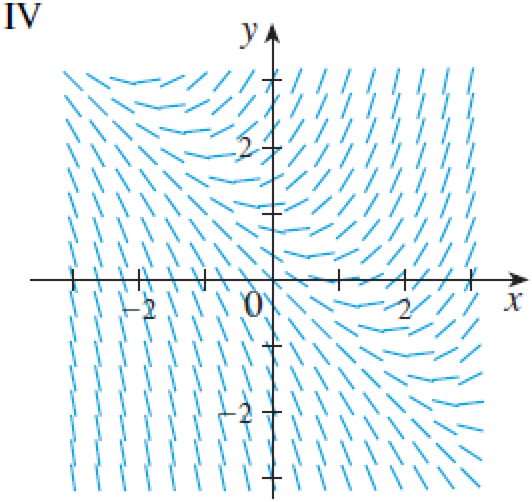
II



III



IV



Exercícios

p. 543

Resolva a equação diferencial.

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x}}{e^y}$

3. $xy^2y' = x + 1$