9

Equações diferenciais gerais Parte 1

Equações Diferenciais Gerais

Em geral, uma **equação diferencial** é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas.
A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação.

Quando consideramos a equação diferencial

$$y' = xy$$

entendemos que y é uma função desconhecida de x.

Uma função *f* é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando *y* = *f* (*x*) e suas derivadas são substituídas na equação.

$$f'(x) = xf(x)$$

Equações Diferenciais Gerais

Quando nos pedem para *resolver* uma equação diferencial, espera-se que encontremos todas as soluções possíveis da equação. Já resolvemos algumas equações diferenciais particularmente simples; a saber, aquelas da forma

$$y' = f(x)$$

Por exemplo, sabemos que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

onde C é uma constante qualquer.

Equações Diferenciais Gerais

EXEMPLO 1 Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUÇÃO Usamos a Regra do Quociente para derivar a expressão em relação a y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

Equações Diferenciais Gerais

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

O lado direito da equação diferencial torna-se

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Portanto, para todo valor de c, a função dada é solução da equação diferencial.

Equações Diferenciais Gerais

Quando aplicamos as equações diferenciais, geralmente não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções (a *solução geral*) quanto em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é denominado **problema de valor inicial**.

Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0). Fisicamente, isso corresponde a medir o estado de um sistema no instante t_0 e usar a solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema.

Equações Diferenciais Gerais

EXEMPLO 2 Encontre uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO Substituindo os valores $t = 0$ e $y = 2$ na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do Exemplo 1, obtemos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Resolvendo essa equação para c, temos $2 - 2c = 1 + c$, o que fornece $c = \frac{1}{3}$. Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

Equações Separáveis

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para dy/dx pode ser fatorada como uma função de x multiplicada por uma função de y. Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

O nome *separável* vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. Da mesma forma, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Equações Separáveis

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para dy/dx pode ser fatorada como uma função de x multiplicada por uma função de y. Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

O nome *separável* vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de x e uma função de y. Da mesma forma, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

onde $h(y) = 1/f(y)$.

Equações Separáveis

Para resolver essa equação, a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y)\, dy = g(x) dx$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado. Então integramos ambos os lados da equação:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

A Equação 2 define y implicitamente como função de x. Em alguns casos também poderemos isolar y em termos de x.

Usamos a Regra da Cadeia para justificar este procedimento: Se h e g satisfazem $\boxed{2}$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\, dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\, dx\right)$$

Equações Separáveis

Logo $$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

e $$h(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Portanto, a Equação 1 é satisfeita.

Equações Separáveis

EXEMPLO 1

(a) Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO

(a) Escrevemos a equação na forma diferencial e integramos os dois lados:

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

onde C é uma constante qualquer. (Poderíamos ter usado uma constante C_1 no lado esquerdo e outra constante C_2 no lado direito. Mas decidimos combiná-las em uma só constante no lado direito, fazendo $C = C_2 - C_1$.)

Equações Separáveis

Resolvendo para y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Poderíamos deixar a solução dessa maneira ou podemos escrevê-la na forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

onde $K = 3C$. (Pois C é uma constante qualquer e o mesmo ocorre com K.)
(b) Se fizermos $x = 0$ na equação geral da parte (a), temos $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfazer a condição inicial $y(0) = 2$, devemos fazer $\sqrt[3]{K} = 2$ e assim temos $K = 8$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Equações Separáveis

A Figura 1 ilustra o gráfico de vários membros da família de soluções da equação diferencial do Exemplo 1. A solução do problema com valor inicial da parte (b) é mostrada em vermelho.

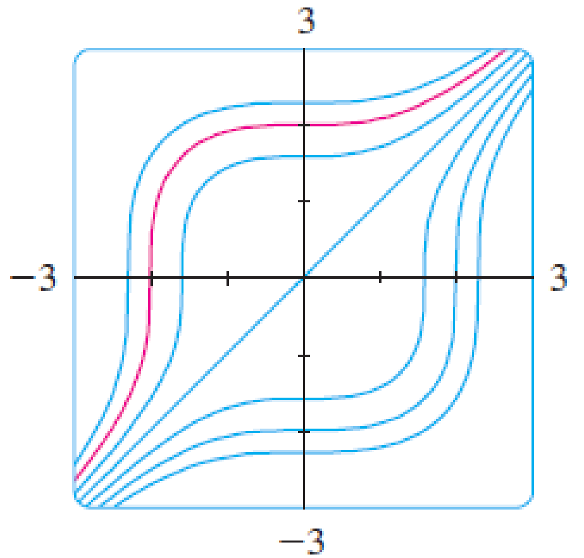

FIGURA 1

Equações Separáveis

EXEMPLO 2 Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUÇÃO Escrevendo a equação em uma forma diferencial e integrando ambos os lados, temos

$$(2y + \cos y)dy = 6x^2 dx$$

$$\int (2y + \cos y)dy = \int 6x^2 dx$$

3 $$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C$$

onde C é uma constante. A Equação 3 fornece uma solução geral implícita. Nesse caso é impossível resolver a equação para expressar explicitamente como uma função de x.

Equações Separáveis

Alguns sistemas de computação algébrica podem traçar as curvas definidas por equações implícitas. A Figura 2 mostra os gráficos de vários membros da família de soluções da equação diferencial no Exemplo 2. Olhando as curvas da esquerda para a direita, os valores de C são 3, 2, 1, 0, -1, -2 e -3

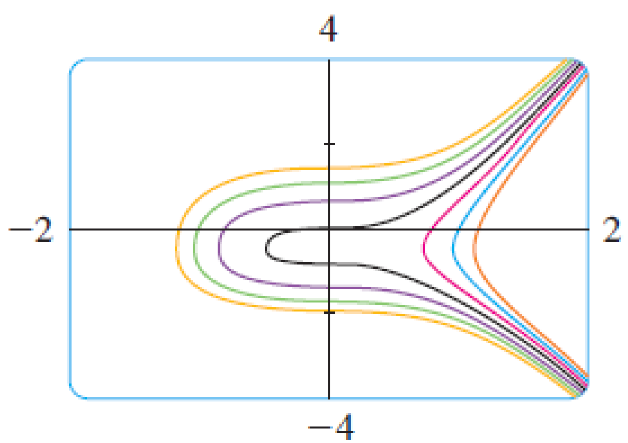

FIGURA 2

Equações Separáveis

EXEMPLO 3 Resolva a equação $y' = x^2 y$.

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação usando a notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Se $y \neq 0$, podemos reescrevê-la em uma notação diferencial e integrá-la:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Essa equação define y implicitamente como função de x. Mas, nesse caso, podemos solucionar explicitamente para y como a seguir:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

Então $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Equações Separáveis

Podemos verificar facilmente que a função $y = 0$ também é uma solução da equação diferencial dada. Dessa forma, podemos escrever a solução geral na forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

onde A é uma constante arbitrária ($A = e^C$, ou $A = -e^C$, ou $A = 0$).

A Figura 3 mostra um campo de direções para a equação diferencial no Exemplo 3. Compare-a com a Figura 4, em que usamos a equação $y = Ae^{x^3/3}$ para representar as soluções por diversos valores de A. Se você usar o campo de direções para esboçar as curvas de solução com a intersecção y 5, 2, 1, -1 e -2, elas irão assemelhar-se com as curvas da Figura 4.

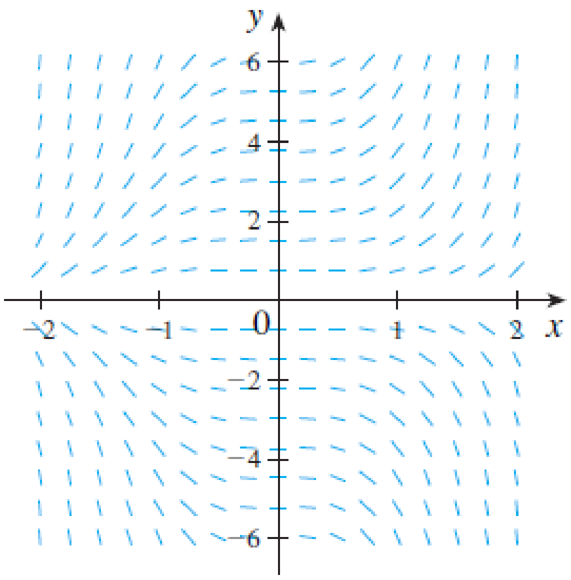

FIGURA 3

Equações Separáveis

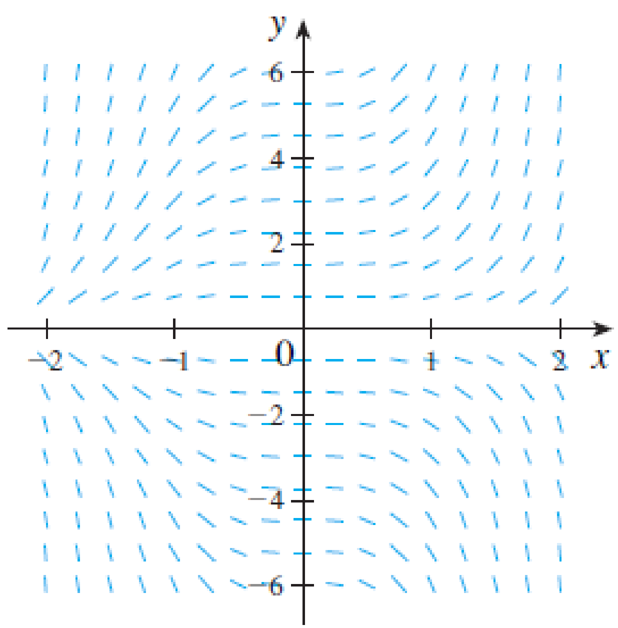

FIGURA 3

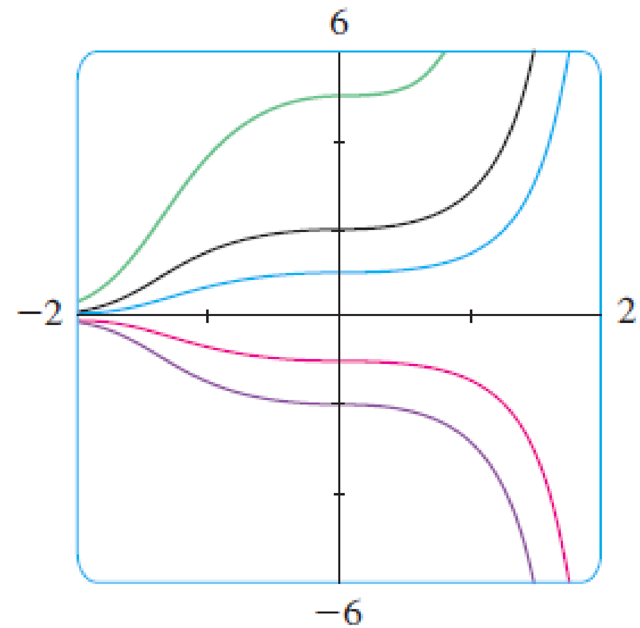

FIGURA 4

Campos de direções

Suponha que nos peçam para esboçar o gráfico da solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

Não conhecemos uma fórmula para a solução, então como é possível que esbocemos seus gráficos? Vamos pensar sobre o que uma equação diferencial significa. A equação $y' = x + y$ nos diz que a inclinação em qualquer ponto (x, y) no gráfico (chamado *curva solução*) é igual à soma das coordenadas x e y no ponto (veja a Figura 1). Em particular, como a curva passa pelo ponto (0, 1), sua inclinação ali deve ser $0 + 1 = 1$. Assim, uma pequena porção da curva solução próxima ao ponto (0, 1) parece um segmento de reta curto que passa por (0, 1) com inclinação 1 (veja a Figura 2).

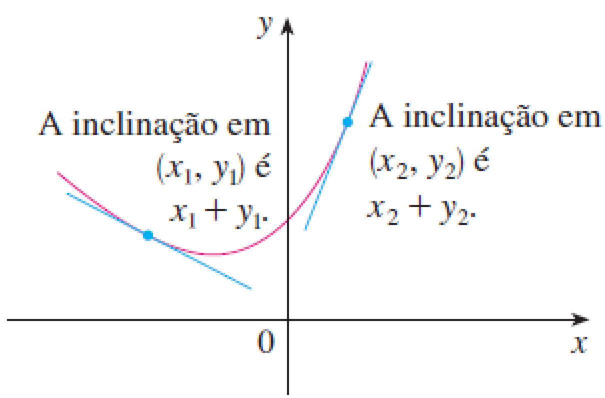

FIGURA 1
Uma solução de $y' = x + y$

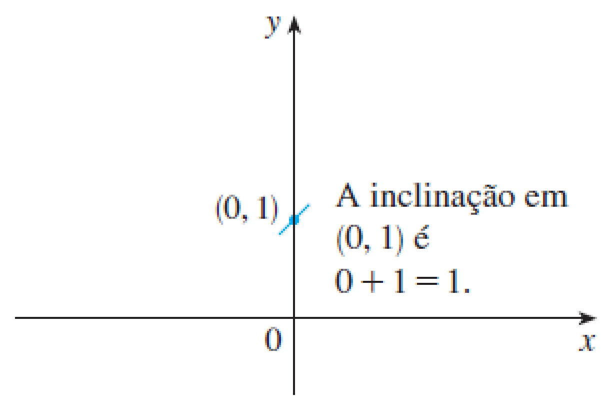

FIGURA 2
Início da curva solução que passa por (0, 1)

)

Campos de direções

Como um guia para esboçar o restante da curva, vamos desenhar pequenos segmentos de reta em diversos pontos (x, y) com inclinação $x + y$. O resultado, denominado *campo de direções*, é mostrado na Figura 3. Por exemplo, o segmento de reta no ponto $(1, 2)$ tem inclinação $1 + 2 = 3$. O campo de direções nos permite visualizar o formato geral das curvas solução pela indicação da direção na qual as curvas prosseguem em cada ponto.

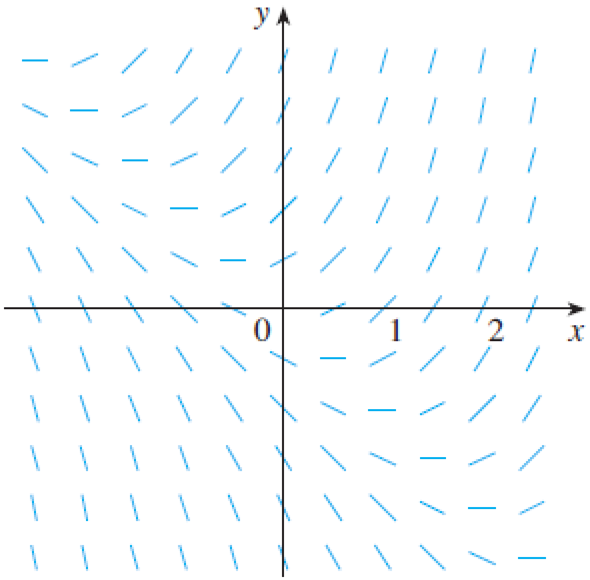

FIGURA 3
Campo de direções para $y' = x + y$

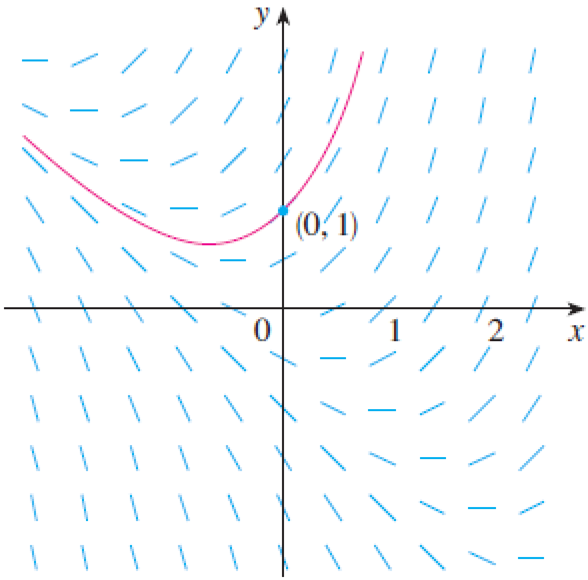

FIGURA 4
A curva solução que passa por $(0, 1)$

Campos de direções

Agora, podemos esboçar a curva solução pelo ponto (0, 1), seguindo o campo de direções como na Figura 4. Observe que desenhamos a curva de modo a torná-la paralela aos segmentos de reta próximos.

Em geral, suponha que tenhamos uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$y' = F(x, y)$$

onde $F(x, y)$ é alguma expressão em x e y. A equação diferencial diz que a inclinação da curva solução no ponto (x, y) na curva é $F(x, y)$. Se desenharmos pequenos segmentos de reta com inclinação $F(x, y)$ em vários pontos (x, y), o resultado será chamado **campo de direções** (ou **campo de inclinações**). Esses segmentos de reta indicam a direção na qual uma curva solução está seguindo, de modo que o campo de direções nos ajuda a visualizar o formato geral dessas curvas.

Campos de direções

EXEMPLO 1

(a) Esboce o campo de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Use a parte (a) para esboçar a curva solução que passa pela origem.

SOLUÇÃO

(a) Podemos começar calculando a inclinação em vários pontos na seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	. . .
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	. . .

Agora, podemos desenhar pequenos segmentos de reta com essas inclinações nesses pontos. O resultado é o campo de direções mostrado na Figura 5.

Campos de direções

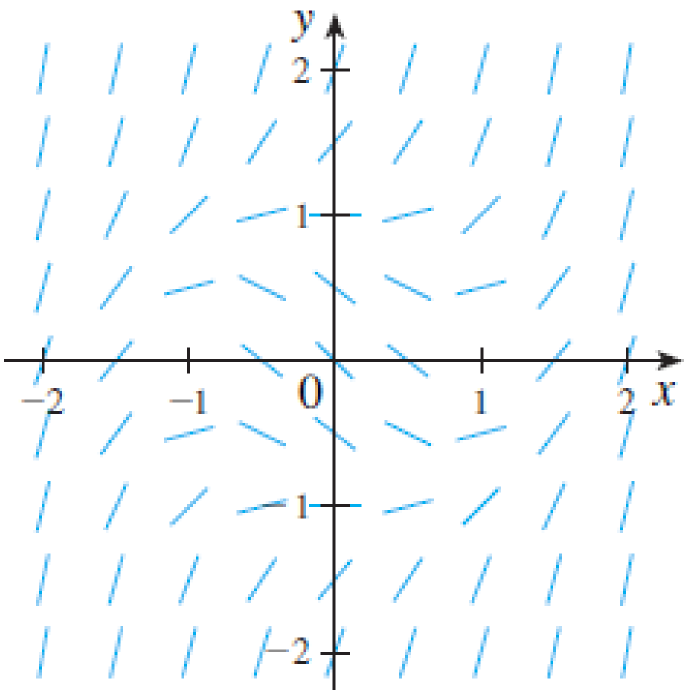

FIGURA 5

Campos de direções

(b) Podemos começar na origem e nos mover para a direita na direção do segmento de reta (que tem inclinação -1). Continuamos a desenhar a curva solução de maneira que ela se mova paralela aos segmentos de reta próximos. A curva solução resultante é exposta na Figura 6. Voltando para a origem, desenhamos a curva solução para a esquerda da mesma maneira.

Campos de direções

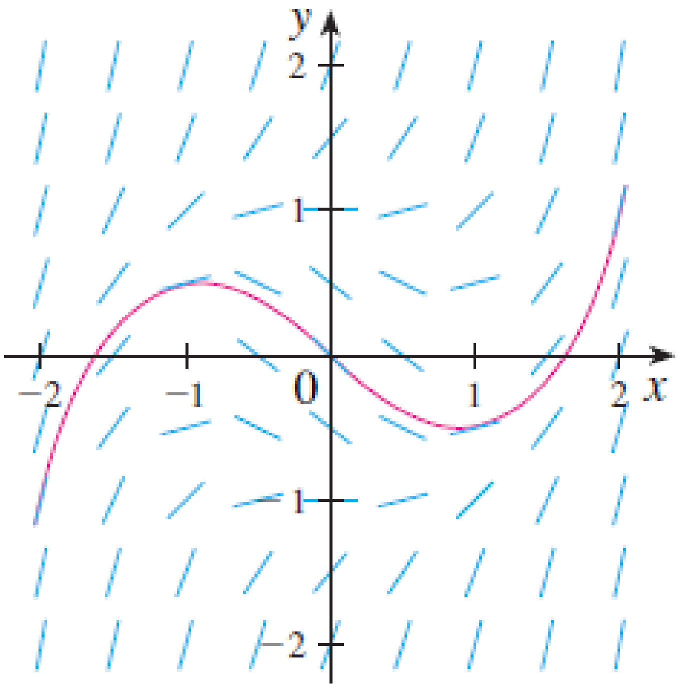

FIGURA 6

Campos de direções

Quanto mais segmentos desenharmos no campo de direções, mais clara se tornará a figura. É claro que é tedioso calcular as inclinações e desenhar segmentos de reta para um número muito grande de pontos manualmente, mas os computadores facilitam essa tarefa. A Figura 7 apresenta um campo de direções mais detalhado, desenhado por um computador, para a equação diferencial no Exemplo 1. Isso nos permite desenhar, com uma precisão razoável, as curvas solução exibidas na Figura 8 com intersecções com o eixo y iguais a -2, -1, 0, 1 e 2.

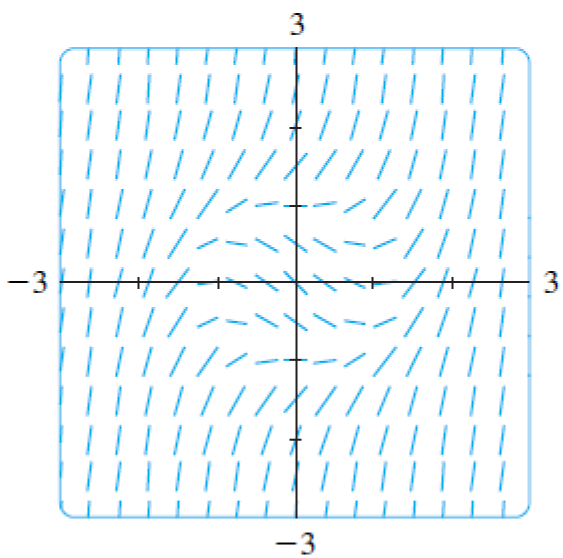

FIGURA 7

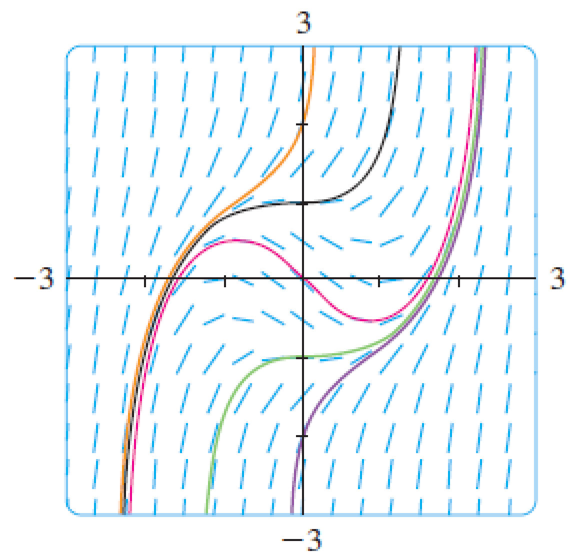

FIGURA 8

Campos de direções

Podemos usar o Geogebra para fazer campos de direções