VI SIPEM
Pirenópolis - Goiás
SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Introduzindo o Conceito de Derivada por Meio da Taxa de Variação: Análise do Desenho de uma Tarefa

[1]*Débora da Silva Soares*

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) - Brasil
debora.soares@ufrgs.br

Palavras-chave:

Ensino de Cálculo. Modelagem Matemática. Tecnologias Digitais.

Keywords

Teaching of Calculus. Mathematical Modeling. Digital Technologies.

RESUMO

Neste artigo apresenta-se uma análise do desenho de uma das tarefas que compõem uma abordagem pedagógica voltada para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a qual tem como ideia central propor o desenvolvimento de alguns dos conceitos da disciplina de forma integrada ao estudo de um modelo matemático para um fenômeno biológico. A análise aqui desenvolvida amplia aquela iniciada em Soares (2015a), considerando os dados obtidos a partir dos relatórios escritos elaborados pelos estudantes. Observou-se que os estudantes conseguiram acompanhar o trabalho proposto na tarefa, registrando suas compreensões ainda intuitivas acerca do conceito de taxa de variação. Além disso, confirmou-se a importância de se fazer modificações em seu desenho de modo a minimizar dificuldades enfrentadas na tarefa.

ABSTRACT

In this paper I develop an analysis about the design of one of the tasks that compose a teaching approach to Differential and Integral Calculus, whose main idea is to propose the development of mathematical concepts in a way interrelated with the study of a mathematical model for a biological phenomenon. The analysis developed in this paper expands the one initiated in Soares (2015a), considering data obtained from written reports elaborated by students. It was observed that students were able to follow the work proposed in the task, registering their comprehensions yet intuitive about the concept of rate of change. Besides, it was confirmed the importance of developing changes in its design to minimize difficulties in the task.

Introdução

Em Soares (2015a) apresentou-se uma primeira análise do desenho de uma das tarefas que compõem a abordagem pedagógica apresentada em Soares (2012), a Tarefa 5, a qual tem o objetivo de introduzir o conceito de derivada a partir de sua interpretação como taxa de variação instantânea no contexto do fenômeno biológico de transmissão da malária. No referido trabalho, observou-se que, de modo geral, o desenho da tarefa aproveita as potencialidades oferecidas pelo software Modellus[1], com o qual os estudantes trabalharam durante o semestre. Entretanto, também observou-se que o uso de uma animação e o modo como a professora conduziu a tarefa pode ter contribuído para que os estudantes utilizassem a noção de velocidade atrelada ao movimento de um objeto e tivessem dificuldade para relacioná-la ao fenômeno em estudo. A sugestão dada, na ocasião, foi a reestruturação do desenho da tarefa, suprimindo o uso da animação e reestruturando seu encaminhamento, de modo que a noção de velocidade possa ser interpretada no contexto do fenômeno biológico mais cedo.

Por outro lado, também observou-se que o desenho da tarefa possibilitou a introdução do conceito de derivada a partir de sua interpretação enquanto taxa de variação, tomando como base uma situação com referência na Biologia e vivência social. Esta perspectiva encontra-se de acordo com o entendimento já "bem aceito de que compreender o conceito de derivada requer uma base intuitiva extensa e ampla de exemplos e percepções relacionadas, especificamente sobre o conceito de taxa de variação em problemas da vida real (...)" (WEIGAND, 2014, p.604). Além disso, oportuniza uma configuração em que a situação-problema precede o trabalho com as funções padrão usualmente estudadas em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Para desenvolver esta análise, apresentada resumidamente até aqui, consideraram-se os dados provenientes de gravações em vídeo dos debates em grande grupo. A proposta do presente trabalho é ampliar o conjunto de dados analisados, focando nos registros escritos que os estudantes produziram durante o desenvolvimento da Tarefa 5. Neste sentido, neste artigo propõe-se analisar o desenho da Tarefa 5, considerando suas potencialidades e limitações no que diz respeito ao desenvolvimento do conceito matemático. A importância dessa análise reside no próprio conceito de derivada, em particular sua interpretação enquanto taxa de variação instantânea, o qual é um dos conceitos fundamentais da disciplina de Cálculo. Na sequência, inicia-se apresentando mais detalhes sobre a Tarefa 5 e o contexto da pesquisa.

[1]Website: <http://modellus.co/index.php/pt/> Acesso em 21 mai. 2015.

Caracterização e Contexto da Pesquisa

Como mencionado anteriormente, a Tarefa 5 tem como objetivo introduzir o conceito de derivada. Esta tarefa compõe a abordagem pedagógica proposta em Soares (2012) a qual tem como ideia central propor o estudo e desenvolvimento de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de forma interligada à análise de um modelo matemático para o fenômeno biológico de transmissão da malária. O modelo de Ross-Macdonald (Fig.1) foi utilizado como base para o estudo proposto. Este modelo é composto por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias não-lineares e descreve como as populações de pessoas infectadas e de mosquitos infectados evoluem ao longo do tempo.

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times p\right) \times Y \times (N - X) - g \times X$$

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times c\right) \times X \times (M - Y) - v \times Y$$

***Figura** 1- Modelo de Ross-Macdonald para a Transmissão da Malária.*

A análise do modelo proposta aos estudantes teve um caráter qualitativo, no sentido de que valorizou a compreensão sobre o significado das equações e parâmetros, assim como um estudo do comportamento de suas soluções. Os estudantes trabalharam com o software Modellus (Fig.2), o qual forneceu representações gráficas e tabulares das soluções do modelo.

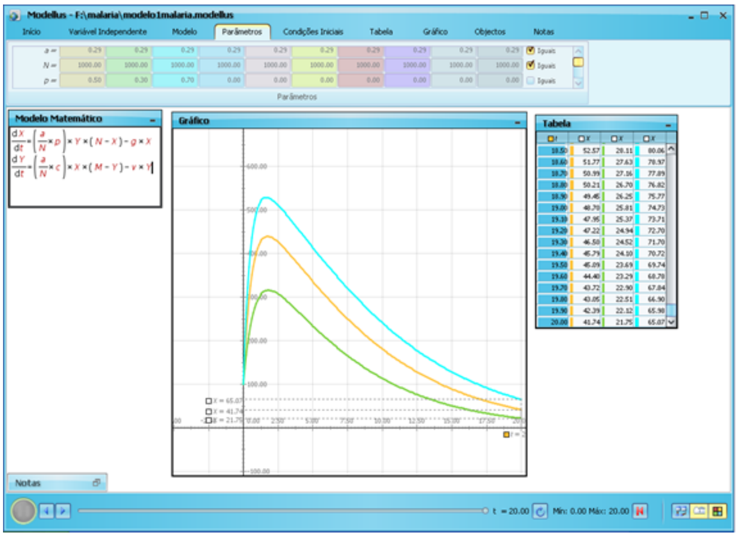

Figura 2- Interface do Software Modellus.

O contexto de aplicação da abordagem pedagógica foi a disciplina Matemática Aplicada do curso Ciências Biológicas da Unesp, Rio Claro, SP. Esta disciplina tem carga horária de 4 horas semanais e sua súmula abrange o conceito de função, noções de limites, derivadas e integrais e suas aplicações. A pesquisa desenvolveu-se segundo um paradigma qualitativo (LINCOLN;

GUBA, 1985) e apoiou-se no *design research*[2] (DOERR; WOOD, 2006). Foram utilizadas diversas fontes de dados para a realização da pesquisa: caderno de campo; relatórios escritos dos estudantes; gravação em vídeo das aulas; gravação em vídeo do diálogo dos estudantes e de seu trabalho no computador com o software Camtasia Studio[3]. Conforme mencionado anteriormente, neste artigo serão analisados os dados provenientes dos relatórios escritos dos estudantes, dando-se continuidade aos ciclos de análise da pesquisa.

Considerações Teóricas

A proposta descrita anteriormente caracteriza-se como Análise de Modelos (SOARES, 2012; SOARES, JAVARONI, 2013), uma vez que convida os estudantes a analisarem um modelo matemático já existente para um fenômeno com referência em outra área científica ou no quotidiano, tendo como foco de análise a compreensão de suas equações e hipóteses, análise de suas potencialidades e limitações, estudo do comportamento de suas soluções e da influência dos parâmetros neste comportamento. Além disso, enfatiza o desenvolvimento de conceitos matemáticos (novos ou não) de forma interligada a esta análise.

Conforme argumentou-se em Soares (2015b), tomando-se como base o trabalho de Niss (2015), a Análise de Modelos pode ser compreendida como um processo de Modelagem Matemática no qual o ciclo de modelagem é reduzido, isto porque ela enfatiza algumas etapas, a saber: a passagem da situação real para o modelo, o estudo das hipóteses e simplificações, e a análise e interpretação do modelo. Ainda conforme Soares (2015b) esta redução no ciclo deve-se, em parte, à presença e ao uso do software Modellus, o qual desenvolve um tratamento matemático do problema, fornecendo representações de suas soluções. Neste sentido, a Análise de Modelos pode ser entendida como uma "reorganização" da Modelagem Matemática enquanto estratégia pedagógica (SOARES, 2015b).

O conceito de reorganização é uma das ideias fundamentais do construto seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), o qual embasa a pesquisa desenvolvida. Este construto sugere que o conhecimento é produzido por coletivos de humanos e mídias (oralidade, escrita, tecnologias digitais, etc.) e que ele muda qualitativamente de acordo com as possibilidades e restrições oferecidas pelas mídias.

Esta mudança está relacionada aos processos de reorganização e moldagem recíproca. O primeiro ocorre na medida em que os indivíduos organizam seu raciocínio e modos de pensar

[2]Uma das características do *design research* é que ele objetiva a elaboração e aprimoramento de um produto, neste caso a própria abordagem pedagógica. Além disso, pressupõe uma análise que se desenvolve em vários ciclos, com base na construção de diferentes tipos de dados.
[3]Website: <https://www.techsmith.com/camtasia.html> Acesso em: 21 mai. 2015.

com base nas possibilidades e restrições oferecidas pela mídia. Por exemplo, o software Modellus reorganiza a tarefa de analisar o modelo de Ross-Macdonald, na medida em que permite que o indivíduo foque seu pensamento na análise dos gráficos e tabelas, em vez de focar seu pensamento em encontrar as soluções do modelo. Já o segundo processo, a moldagem recíproca, ocorre conforme a mídia molda o pensamento do indivíduo a partir do *feedback* que fornece e, simultaneamente, é moldada pelo indivíduo conforme este a utiliza de formas personalizadas. Por exemplo, as representações gráficas e tabulares das soluções do modelo fornecidas pelo Modellus moldam o tipo de análise desenvolvida pelos estudantes, a qual é qualitativa. Por outro lado, ao trabalharem com o Modellus, alguns estudantes personalizaram o uso da tabela, utilizando-a apenas para checar valores da função em instantes específicos (SOARES, 2012).

De forma geral, podemos dizer que o construto seres-humanos-com-mídias sugere que as mídias, em particular o software Modellus, têm um papel central nos processos de produção de conhecimento. Este papel, no entanto, não é intrínseco às mídias. Neste sentido, o papel desempenhado pelo Modellus está atrelado, em parte, à abordagem pedagógica como um todo e ao desenho de cada uma das tarefas em particular. Deste modo, analisar o desenho das tarefas torna-se fundamental para o entendimento do próprio papel desempenhado pelo software, assim como sua influência na compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

A Tarefa 5 – Introdução do Conceito de Derivada

As tarefas desenvolvidas anteriormente à Tarefa 5 trabalharam com o conceito de função e com um estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de suas soluções. Como o conceito de limite é estudado na disciplina de forma intuitiva, a abordagem não contem uma tarefa especificamente voltada para esse conceito.

A Tarefa 5 teve uma duração de três horas e ela foi desenvolvida de forma a intercalar debates em grande grupo e debates nas duplas. Seu início foi um debate em grande grupo. A professora pediu que os estudantes plotassem com o software Modellus o gráfico da solução *X(t)*, a qual informa a quantidade de pessoas infectadas pelo parasita malário em cada instante de tempo, para dois casos: caso 1: *a=0,29*; caso 2: *a=0,6*. O parâmetro *a* informa a frequência com que cada mosquito pica as pessoas em cada unidade de tempo. A Figura 3 a seguir apresenta os gráficos que deveriam ser gerados. Após os alunos gerarem os gráficos, a professora observou com eles que os dois gráficos possuem um comportamento semelhante, porém são diferentes. Ela pediu que os alunos analisassem em duplas o comportamento dos gráficos e procurassem explicar de que maneira eles diferem um do outro.

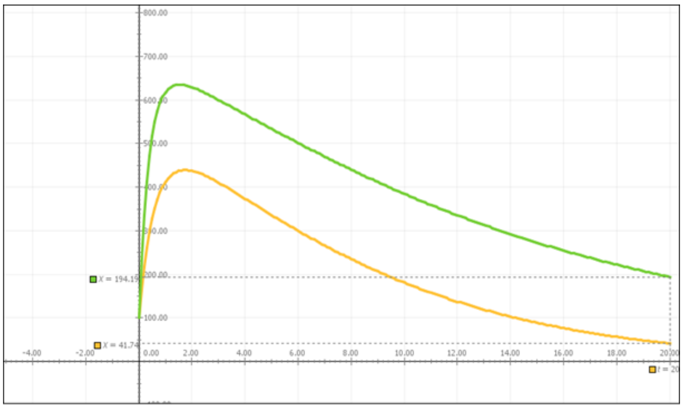

***Figura** 3 - Gráficos de X(t). Caso 1: a=0.29 (gráfico laranja).*
Caso 2: a=0.6 (gráfico verde)

Os estudantes debateram em duplas o questionamento proposto pela professora e, na sequência, desenvolveu-se um debate em grande grupo. Conforme apresentado em Soares (2015a), duas ideias principais surgiram para diferenciar os dois gráficos: o número máximo de pessoas infectadas e a diferença de velocidade de cada gráfico, ideia essa que gerou um debate intenso na turma. Inicialmente, o aluno R. comentara que os dois gráficos atingiam o "pico" máximo com a mesma velocidade, mas os colegas discordaram, e um diálogo desenrolou-se no sentido de compreender o que estava acontecendo. Em particular, duas observações trouxeram novos elementos para o debate: a primeira, da aluna F., de que a velocidade dos gráficos era variável; a segunda, da aluna D., de que poderia considerar-se a aceleração. A observação de que a velocidade era variável gerou a necessidade de esclarecimento por parte da professora de sua estratégia de utilizar a velocidade média para comparar os dois gráficos. Já a ideia de aceleração, acrescentou algo inesperado pela professora, que procurou enfatizar a interpretação de velocidade em termos do fenômeno estudado.

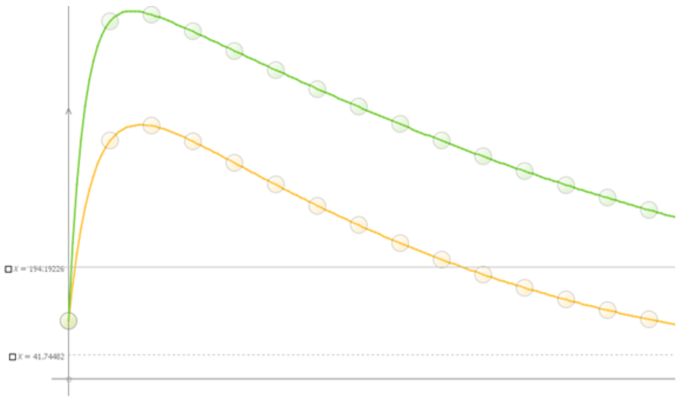

***Figura** 4 - Gráficos de X(t) com imagem estroboscópica de uma partícula.*

Na sequência desse debate, a professora sugeriu que os estudantes analisassem uma animação feita no software, na qual uma partícula aparece sobre a curva e deixa "marcas" a cada certo intervalo de tempo, como em uma imagem estroboscópica (Fig.4). Com base nesse gráfico, os estudantes calcularam a velocidade média para dois intervalos de tempo e fizeram sua interpretação em termos do fenômeno biológico. Conforme comentado em Soares (2015a), o objetivo da professora com essa animação era auxiliar os alunos a analisar o comportamento dos gráficos e refletir sobre o conceito de taxa de variação média.

Nesta primeira etapa, o desenho da Tarefa 5 propunha uma análise do comportamento de dois gráficos solução do modelo de Ross-Macdonald e, a partir do estudo de características que diferenciam seu comportamento, seu objetivo era introduzir a noção de velocidade média como estratégia/recurso para compreender melhor essa diferença. Nos relatórios feitos pelos alunos sobre essa tarefa, podemos encontrar os seguintes relatos.

> Nos foi proposto que acrescentássemos no gráfico os valores de a, que é a taxa de picadas. Na primeira curva, o valor de a seria igual a 0,29 e no segundo gráfico seria igual a 0,6. Iniciamos uma discussão sobre quais seriam as diferenças apresentadas entre estes gráficos. Concluímos que as diferenças podem ser o pico de pessoas infectadas, a velocidade em que o gráfico chega a esse pico e o número final de pessoas infectadas no t=20. Discutindo sobre as velocidades dos gráficos, chegamos a algumas conclusões. O gráfico 1, em que o a=0,29, tem a taxa de picadas menor, consequentemente apresenta um pico de pessoas infectadas menor, e portanto a velocidade com que este gráfico chega a esse pico também é menor. Já o gráfico 2, em que a=0,6, tem a taxa de picadas maior, consequentemente apresenta um pico de pessoas infectadas maior, e portanto a velocidade com que o gráfico chega ao pico também é maior. (Relatório Tarefa 5, R. e N.)

> Construímos os gráficos X(t) para a= 0,29 e a= 0,6 e verificamos que no momento inicial os dois picos atingem o mesmo período, porém em a= 0,6 atinge em uma velocidade maior em relação ao de a= 0,29. Isso ocorre, pois ao percorrerem distâncias diferentes (a= 0,6 é maior que em a= 0,29) chegam ao mesmo tempo. Portanto, o número de pessoas infectadas é maior em a= 0,6 nesse período. A partir do pico, a tendência é diminuir o número de pessoas infectadas e os gráficos aparentemente assumem um comportamento semelhante. Mas, é necessário calcular a taxa de variação dos gráficos em um período de tempo para verificarmos se o comportamento é realmente igual nos dois casos. (Relatório Tarefa 5, P. e K.)

> A discussão girou em torno de a velocidade ser constante ou variável ao longo do tempo. A partir da análise do gráfico dado pelo modelo, acreditamos que a velocidade no modelo varia, pois, o gráfico é uma parábola [curva] o que indica vários valores diferentes para pessoas infectadas relacionadas ao tempo. Contudo, após muita discussão, entendemos a ideia sugerida pelos professores de considerarmos não a velocidade constante e sim a velocidade média constante. Para o cálculo da velocidade média consideramos a seguinte fórmula: $Vm = \Delta S / \Delta t$, no nosso caso, ΔS é igual à ΔX. (Relatório Tarefa 5, P.S. e F.)

Uma análise dos trechos acima sugere algumas observações. A primeira delas é que, das seis duplas que entregaram o relatório dessa tarefa, apenas P.S. e F. registraram o debate sobre a velocidade ser variável ao longo do tempo. De fato, esta foi uma questão que intrigou bastante a dupla e, durante o debate em grande grupo, F. insistiu bastante nessa característica da velocidade, demorando um pouco para compreender a ideia de comparar as velocidades médias de crescimento dos gráficos. Este debate foi um ponto considerado nevrálgico, conforme observado em Soares (2015a), pois o modo como o debate se desenvolveu pareceu contribuir para que os estudantes restringissem a interpretação de velocidade média em uma situação de movimento, e não ampliassem o conceito para taxa de variação média, conforme se queria.

Um segundo aspecto a observar e que de certo modo está relacionado ao primeiro, é o registro quase unânime que os estudantes fizeram da ideia de "velocidade", e não de "taxa de variação". Exceto pelo comentário final escrito por P. e K. acerca do uso da taxa de variação para comparar o comportamento dos gráficos em seu trecho final, todas as demais ocorrências aludem ao termo "velocidade". Este fato parecesse corroborar com a observação feita acima e também com a conclusão apresentada em Soares (2015a) de que é preciso interpretar a ideia intuitiva de velocidade apresentada pelos estudantes no contexto do fenômeno da transmissão da malária desde o início da tarefa, enfatizando a noção de taxa de variação.

Outra conjectura feita em Soares (2015a) foi a de que o uso da animação com as imagens estroboscópicas da partícula não foi útil conforme esperado para o desenvolvimento da tarefa e, além disso, poderia ter incentivado os estudantes a manter a interpretação em termos do movimento de um objeto. Os trechos dos relatos escritos não dão subsídios para comprovar essa segunda conjectura, porém, o fato de não haver comentários nos textos a respeito dessa animação, pode indicar que a primeira conjectura está correta.

Apesar dessas dificuldades manifestadas principalmente no debate em grande grupo, mas também no relatório de P.S. e F., os estudantes conseguiram avançar no desenvolvimento da tarefa. Na sequência eles calcularam a taxa de variação média em dois intervalos e comparam seus resultados, interpretando-os. A dupla H. e R. registrou os cálculos em seu relatório enquanto a dupla R. e N. registrou uma interpretação para os valores encontrados.

> Também aprendemos a calcular a velocidade média dos gráficos, como no exemplo:
> Caso 1:
> $\Delta x/\Delta t$ =(411.51-100)/1-0 =311.51 (nºpessoas infectadas/dia)
> Caso 2:
> $\Delta x/\Delta t$ =(617,5 -100)/1-0 = 517,5 (nºpessoas infectadas/dia)
> Esses valores nos mostram a velocidade média do gráfico antes de ele atingir o pico.
> Caso 1:
> $\Delta x/\Delta t$ =(373,6 -411,51)/4-1 = -12,6 (nºpessoas infectadas/dia)
> Caso 2:
> $\Delta x/\Delta t$ =(566.89-617,5)/4-1= -16,8 (nºpessoas infectadas/dia)
> (Relatório Tarefa 5, H. e R.)

> Após calcularmos a velocidade média em algumas variações de tempo no gráfico, percebemos que se a velocidade média é positiva, significa que mais pessoas estão ficando infectadas, e se a velocidade média é negativa, significa que mais pessoas estão se recuperando. (Relatório Tarefa 5, R. e N.)

A próxima etapa do desenho da Tarefa 5 constituiu-se em debater uma estratégia para se obter a taxa de variação instantânea da função *X(t)*. Conforme comentado em Soares (2015a), um dos alunos rapidamente sugeriu que se diminuísse o tamanho do intervalo de tempo, fazendo *h* tendendo a zero. A professora conduziu o debate de modo a esclarecer as ideias por trás dessa estratégia. Primeiramente, sugeriu que os estudantes debatessem nas duplas o que entendiam sobre a ideia apresentada. Na sequência retomou o debate em grande grupo, no qual duas ideias apareceram: i) utilizar a fórmula da velocidade para o MRUV aprendida na Física, a qual utiliza a aceleração; ii) utilizar um valor muito pequeno de *h* para calcular a taxa de variação instantânea.

Com relação à ideia (i), a professora explicitou a necessidade do uso da aceleração na fórmula mencionada e procurou enfatizar a diferença entre o estudo que estavam desenvolvendo e o estudo de um objeto em movimento. Com relação à ideia (ii), a professora conduziu um debate com os estudantes de modo que observassem que, ao utilizar um valor pequeno de *h*, ainda assim teriam um intervalo, de modo que o valor encontrado seria da taxa de variação média. Porém, poderiam usar a estratégia de fazer cálculos com valores cada vez menores de *h* e tentar observar o que ocorria. A professora dividiu os cálculos entre os alunos e, utilizando os valores obtidos na tabela apresentada pelo software, os estudantes construíram em conjunto a seguinte tabela (Tabela 1).

Variação de h para t=1	Velocidade média para curva laranja (a=0.29)	Velocidade Média para curva verde (a=0.60)
1	311.5	517.49
0.1	650.54	1343.37
0.01	693.96	1518.61
0.001	702.34	1537.84
0.0001	702.93	1539.8
0.00001	702.99	1539.98
0.000001	703	1540
0.0000001	703	1540

***Tabela** 1 - Cálculo da taxa de variação média de X(t) para diferentes valores de h.*
Fonte: Relatório Tarefa 5, P.S. e F.

Observando a tabela em conjunto, os estudantes observaram, com a professora, que os valores das taxas de variação média começam a se aproximar de certo valor conforme o valor de *h* é cada vez menor. Usando o conhecimento intuitivo de limite trabalhado na disciplina, a professora definiu este valor como sendo a taxa de variação instantânea. Os registros abaixo ilustram o entendimento dos estudantes sobre essa etapa da tarefa.

> Se considerarmos o "h"(tempo adicionado) um valor muito pequeno, tendendo a zero, podemos chegar num valor muito próximo de um instante. Nesse caso, para calcularmos a velocidade, chamaremos de velocidade instantânea. Como exemplo, pegaremos o instante t0= 0 e t= 0,0000001 em a= 0,6:
>
> Vinst= X(t0+h) – X(t0)/h = 100,000154-100/0,0000001= 1540.
>
> Portanto, quanto mais diminuir o "h" melhor será o valor da velocidade num dado instante. (Relatório da Tarefa 5, P. e K.)
>
> Também vimos na aula como calcular a velocidade instantânea de certo ponto no gráfico, onde quanto mais próximo de zero o tempo estiver mais próximo da velocidade instantânea o resultado será. (Relatório da Tarefa 5, H. e R.)
>
> Quando tendemos ΔX à zero, para o cálculo da velocidade instantânea, fazemos isso em um intervalo de tempo - quanto menor possível - o que pode nos levar a consideração de que a velocidade a ser avaliada, é a velocidade média. Quando tendemos o tempo à zero, tendemos a utilizar a menor variação de tempo possível para fazer os cálculos, no caso, na aula, variamos o tempo em um h de 1, 0.1, 0.01, 0.001 , 0.0001, 0.00001 e 0.000001. Para essas variações no tempo, obtivemos os seguintes valores de velocidade média para o gráfico, considerando valores de X para t=1.
>
> [Tabela 1]
>
> Ao avaliarmos a tabela constatamos que os valores para velocidade média chegam muito próximos de se tornarem constantes quando considerado um intervalo de tempo mínimo, isso nos leva a consideração antes feita de que a velocidade média seria constante. (Relatório da Tarefa 5, P.S. e F.)

Os trechos acima sugerem que a dupla P.S. e F. não registrou a ideia de taxa de variação instantânea em seu relatório. As estudantes fazem a análise dos valores da tabela, enfatizando que referem-se a taxas de variação média, e concluem que esta taxa é constante, mas não fazem uma análise do processo envolvido na estratégia desenvolvida. Este registro, aliado aos dados obtidos a partir da filmagem da aula, dá indícios de que ainda nesse momento as estudantes não estão esclarecidas quanto ideia de velocidade média.

Já as duplas P. e K., e H. e R. compreenderam a estratégia desenvolvida em aula como uma estratégia de aproximação, quer dizer, quanto menor o valor de *h*, mais próximo o resultado obtido será do valor da taxa de variação instantânea. Em termos de definição de limite, observa-se que a compreensão dos estudantes é intuitiva, mas isso está de acordo com o próprio desenvolvimento do conceito na disciplina. De fato, o conceito de limite é visto apenas intuitivamente, sem definições formais.

Como fechamento da tarefa, a professora procurou relacionar a ideia de taxa de variação instantânea debatida em aula com as equações que definem o modelo de Ross-Macdonald. Como tarefa de casa, os estudantes foram convidados a encontrar o valor de dX/dt para $t=0$ a partir da equação do modelo, utilizando as informações obtidas por meio do software. Essa questão foi retomada no encontro seguinte. Além disso, nas aulas que se seguiram, o professor da disciplina ampliou o debate acerca do conceito de taxa de variação instantânea e derivada no contexto das funções padrão com as quais usualmente se trabalham na disciplina.

Considerações Finais

A análise dos relatórios escritos da Tarefa 5 produzidos pelos estudantes sugere que, apesar de algumas dificuldades já identificadas em Soares (2015a), eles conseguiram acompanhar a análise proposta do comportamento dos gráficos, a comparação entre as taxas de variação média e a estratégia para se determinar a taxa de variação instantânea. Seus registros indicam uma compreensão ainda intuitiva acerca desses temas, o que é esperado, já que a tarefa constituiu-se como uma introdução ao conceito.

Com base no que foi observado anteriormente, algumas mudanças são necessárias no desenho da tarefa para que o conceito de taxa de variação seja mais enfatizado, ao invés da ideia de velocidade. Essas mudanças incluem a eliminação da animação (Fig.4) e uma interpretação do conceito de velocidade no contexto do fenômeno mais cedo no desenvolvimento da tarefa, corroborando com as considerações apresentadas em Soares (2015a). Ainda, considera-se relevante aprimorar-se o desenho da tarefa no sentido de abarcar definições matematicamente mais precisas, como por exemplo, o conceito de limite. Esses mudanças constituem o próximo ciclo de aprimoramento da proposta, o qual já se encontra em desenvolvimento.

Referências

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.* New York: Springer, 2005.

DOERR, H.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p.113-130. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry.* Newbury Park: Sage Publications, 1985.

SOARES, D. S. *Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2012.

SOARES, D. S. Derivada no Contexto de Transmissão da Malária: considerações acerca do desenho de uma tarefa. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 9, 2015, São Carlos. *Anais...* São Carlos: UFSCAR, 2015a. p.1-15. CD-ROM.

SOARES, D. S. Model Analysis with Digital Technology – a "hybrid approach". In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BEIMBENGUT, M. S. (Eds.) *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences.* New York: Springer, 2015b.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Orgs.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.195-219.

WEIGAND, H.-G. A discrete approach to the concept of derivative. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, v.6, n.4, p.603-619, 2014.