



## História da Matemática no Ensino de Teoria de Grafos: Uma Experiência à Luz do Jogo de Vozes e Ecos

### History of Mathematics to Teaching Graph Theory: An Experience Trough the Voices and Echoes Game

<sup>1</sup>Lauro Chagas e Sá

<sup>1</sup>Instituto Federal do Espírito Santo – Brasil  
lauro.sa@ifes.edu.br

#### Palavras-chave:

Teoria de Grafos. História da Matemática. Jogo de Vozes e Ecos. Ensino Médio.

#### Keywords

Graph Theory. History of Mathematics. Voices and Echoes Game. High School.

#### RESUMO

Este trabalho apresenta recorte de pesquisa sobre utilização de História da Matemática em sala de aula, a partir de uma experiência com ensino de Teoria de Grafos. A Teoria do Jogo de Vozes e Ecos, adotada como referencial teórico deste estudo, busca uma participação da cultura extra-matemática para proporcionar ao estudante uma ampliação crítica de seu conhecimento. Em sala de aula, propomos, por meio de carta, a resolução de um desafio que adapta o Problema das Sete Pontes de Königsberg (1736) à disposição geográfica da Grande Vitória, região onde residem os alunos. Além da carta, foi utilizado um material didático próprio, a partir do qual identificamos ecos produzidos por alunos de Ensino Médio durante a resolução das atividades sobre Teoria de Grafos. Ao final deste estudo, observamos que o uso da história da matemática caracteriza-se como alternativa para abordagem inicial da Teoria de Grafos no Ensino Médio, pois entendemos que os ecos produzidos por alunos durante a atividade proposta apontam para uma apropriação do conhecimento. Dessa forma, verificamos que referencial teórico do Jogo de Vozes e Ecos pode tornar-se um norteador para discussões de temas da matemática, por meio de sua história.

#### ABSTRACT

This paper presents parts of a research on the use of history of mathematics in the classroom, from an experience with graph theory teaching. The voices and echoes game theory, adopted as a theoretical framework of this study, seeks an extra-mathematical culture participation to provide the student a critical expansion of his knowledge. In the classroom, we proposed, by letter, the resolution of a challenge adapting the Königsberg Seven Bridges Problem (1736) to the geographical layout of Grande Vitória, region where students live. In addition to the letter, it was used a private didactical material, from which we identified echoes produced by high school students during the resolution of the activities on graph theory. At the end of this study, we observed that the use of the history of mathematics is characterized as an alternative to the initial approach of graph theory in high school, because we understand that the echoes produced by students during the proposed activity point to an appropriation of knowledge. Thus, we find that the theoretical framework of voices and echoes game can be used as a guide for mathematics topics discussions through its history.

### Introdução

O desenvolvimento de conceitos matemáticos que relacionam elementos de conjuntos discretos é bastante recente, se comparado à história da “matemática contínua”. No Ensino Médio, percebe-se que a Matemática Discreta tem se reduzido ao estudo de análise combinatória e probabilidade. Dessa forma, a inclusão dos Grafos no Ensino Médio permite a ampliação da discussão sobre os tópicos deste campo da matemática.

Alguns aspectos normativos reforçam as potencialidades de se abordar a Matemática Discreta e a Teoria dos Grafos no Ensino Médio em sala de aula. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais defendem que “estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa [...] enfrentar problemas de diferentes naturezas” (BRASIL, 2002, p. 9). Nesse sentido, estudar elementos da Matemática Discreta pode significar a diversificação da Matemática para além dos elementos algébricos, tão marcantes nos estudantes da Escola Básica. É importante destacar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem, explicitamente, a discussão da Teoria dos Grafos no Ensino Médio:

No Ensino Médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo dos problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler. (BRASIL, 2006, p. 94).

Na esfera estadual, o Currículo Básico da Escola Estadual do Espírito Santo prevê a “introdução à Teoria dos Grafos” (ESPIRITO SANTO, 2009, p. 120) para o segundo ano do Ensino Médio e “resolução de problemas utilizando grafos” (ESPIRITO SANTO, 2009, p. 122) para o terceiro ano. Dessa forma, em face da necessidade de se buscar alternativas metodológicas para auxiliar o professor na abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, nosso estudo apresentou a história da Teoria dos Grafos e algumas de suas contribuições na abordagem inicial deste tema em uma turma de segundo ano de Ensino Médio (SÁ, 2014; SÁ; SILVA, 2015). Nesta produção, objetivamos identificar ecos produzidos por alunos durante a resolução de atividades propostas, destacando contribuições da Teoria do Jogo de Vozes e Ecos para utilização de História da Matemática em sala de aula.

### História da Matemática e Jogo de Vozes e Ecos

Uma reflexão sobre a utilização da História na Educação Matemática nos conduz a uma escolha teórica. Os pontos de vista são variados e dependem da visão que cada professor e

pesquisador têm da História e dos valores que estão presentes nesta metodologia. Miguel e Miorim (2011), por exemplo, organizam as perspectivas em evolucionista linear, estrutural-construtivista operatória, evolucionista descontínua, sociocultural e do Jogo de Vozes e Ecos. Em outra categorização referente ao uso de História da Matemática, Dynnikov e Sad (2007) apresentam três opções para o emprego de fontes históricas em sala de aula: de modo factual, de modo processual e como fonte de significado. A classificação que Motta (2006) faz em relação ao uso da História na Educação Matemática é influenciada pelas perspectivas levantadas por Miguel e Miorim (2011). Nesse sentido, a autora defende que as perspectivas evolucionista linear, estrutural-construtivista operatória e evolucionista descontínua constituem a imagem da História da Matemática como “espelho” enquanto as perspectivas sociocultural e do Jogo de Vozes e Ecos constituem a imagem como “pinturas”.

Ao analisar as categorizações apresentadas, percebemos que a Teoria do Jogo de Vozes e Ecos é elemento comum entre as perspectivas sociocultural e do jogo de Vozes de Miguel e Miorim (2011), a concepção de pintura de Motta (2006) e o terceiro modo de utilizar a história, de Dynnikov e Sad (2007). A Teoria do Jogo de Vozes e Ecos foi introduzida, em 1996, por Paolo Boero e outros investigadores da Universidade de Gênova, na Itália. Ela busca uma participação da cultura extra-matemática para proporcionar ao estudante uma ampliação crítica de seu conhecimento. Segundo Boero *et al* (2001), a teoria iniciou-se com as teses de Bettina Pedemonte e Elisabetta Robotti e foi, mais tarde, ampliada com investigações e experiências em sala de aula, que originaram quatro trabalhos apresentados nas reuniões anuais do *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (amplamente conhecidas como *PME – Psychology of Mathematics Education*), nos anos de 1997 a 1999 (BOERO; PEDEMONTE; ROBOTTI, 1997; GARUTI, 1997; BOERO *et al*, 1998; GARUTI *et al*, 1999).

Segundo Boero *et al* (1998), algumas expressões verbais e não-verbais representam importantes modificações da matemática e da ciência. Cada uma dessas expressões transmite um conteúdo, uma organização do discurso e do horizonte cultural desses saltos históricos. Referindo-se a Bakhtin (2008), Boero e seu grupo chamam essas expressões 'vozes'. No mesmo trabalho, os autores afirmam que o constructo teórico dos "jogos de linguagem" de Wittgenstein (1975) pode ser explorado para descrever como as potencialidades da linguagem permitem que teorias sejam construídas, descritas e discutidas. Para ambas as correntes que compõem essa teoria, o conhecimento é concebido a partir de atividades mediadas e é resultante de ações nas quais as pessoas envolvidas se engajam. Dessa forma,

a perspectiva do Jogo de Vozes e Ecos também segue o referencial teórico de Vigotski e procura trabalhar a linguagem como sistema simbólico fundamental na mediação entre o sujeito e o conhecimento matemático por meio da interação social, com o uso das Vozes e dos Ecos por ela produzidos (MOTTA, 2006, p. 79).

Com as interações entre sujeitos, cada indivíduo é capaz de produzir um enunciado que se concretiza por meio de um texto, que pode ser oral, escrito ou imagético. Influenciados pelo conceito de polifonia de Bakhtin (2008), podemos afirmar que todos os enunciados constituem-se a partir de outro. Dessa forma, ainda que não consigamos distinguí-las com clareza, há pelos menos duas vozes que compõem o discurso de um indivíduo. Segundo Fiorin (2008), esses discursos alheios podem estar inseridos no enunciado de duas formas:

- ⇒ Discurso objetivado, no qual o discurso alheio é abertamente citado e nitidamente separado do discurso citante;
- ⇒ Discurso bivocal, no qual não há separação muito nítida do enunciado do citante e do citado.

Além dos enunciados alheios ao discurso, é importante destacar o papel dos recursos extra-linguísticos na atribuição de sentido ao discurso. Nesse viés, Wittgenstein (1975) defende uma "gramática profunda", na qual toda proposição repousa. Essas regras gramaticais são parte da significação de um enunciado e determinam o que tem sentido e o que não tem sentido dizer (GOTTSCHALK, 2004). Portanto, durante a elaboração de enunciado, precisamos estar atentos tanto à elaboração estrutural do discurso quanto à sua aplicação em um contexto.

Boero *et al* (2001, p.1) afirma que "o Jogo de Vozes e Ecos consiste na apropriação das 'vozes' da história por alunos (sob a orientação do professor) e da sucessiva produção individual de 'ecos'", que se materializam em novos enunciados, submetidos a um contexto. De acordo com Boero, Pedemonte e Robotti (1997), durante a execução de tarefas adequadas propostas pelo professor, o aluno pode fazer conexões entre a voz e suas próprias interpretações, concepções, experiências, e, dessa forma, produzir um 'eco', ou seja, uma ligação com a voz explicitada através de um discurso. Sendo a ação uma característica individual do sujeito, cada estudante pode produzir ecos de diferentes tipos e, por isso, torna-se necessária uma distinção entre esses ecos. Inicialmente, é preciso distinguir os ecos individuais (produzidos exclusivamente pelos alunos) e os ecos coletivos (produzidos durante uma discussão em sala de aula). Os ecos individuais, por sua vez, podem ser classificados em ecos superficiais, mecânicos, de assimilação, ressonância e dissonância, os quais detalhamos posteriormente.

### **Delineando a Pesquisa: Escola, Participantes e Material Utilizado**

A escola-campo pertence à rede estadual do Espírito Santo e recebe alunos oriundos de diversos bairros de Vitória, principalmente, daqueles situados no entorno dela. As atividades deste trabalho foram realizadas em dois momentos, um em 2012 e outro em 2013, com duas turmas de segundo ano de Ensino Médio do turno matutino. As turmas eram compostas por trinta e sete alunos e por trinta e quatro alunos.

Iniciamos nossa investigação com um estudo piloto, que compreendia a exibição de vídeo, resolução de problemas em grupo e apresentação das soluções. Foram cinco problemas distintos, retirados de Santos, Mello e Murari (2007), Lopes (2010) e Jurkiewicz (2012). Verificamos, nesta ocasião, a viabilidade de investigação sobre o tema Grafos. Em especial, observamos que o Problema das Seis Pontes de Vitória, releitura do Problema das Sete Pontes de Konisberg, foi o que mais provocou os alunos. Acreditamos que a forma com que foi proposto o problema e a proximidade com a realidade contribuiu para a grande aceitação e engajamento dos alunos frente à proposta apresentada.

No segundo momento, preparamos diferentes atividades didáticas, que poderiam ser realizadas individualmente ou em duplas, a partir do planejamento com a professora regente da turma. Ao elaborar atividades didáticas que fizessem uso de história da Teoria dos Grafos, retomamos ideias da Teoria do Jogo de Vozes e Ecos. Por isso, elaboramos um material no qual acreditamos conter a estratégia adotada por Euler para resolver o Problema das Sete Pontes de Konisberg. Para tornar o processo mais dinâmico, não apresentamos diretamente o modelo formulado pelo matemático suíço. Transformamos as heurísticas de Euler em dicas para os alunos, num material que inicia com a história das pontes de Konisberg e conduz os alunos na elaboração de grafo, tentando refazer a ideia de Euler. Após esta tentativa, eles deveriam fazer a contagem dos graus dos vértices, provocando uma generalização até chegar ao Teorema da Existência de Caminhos Eulerianos. Para leitura do texto e resolução das questões, os alunos se organizaram em duplas ou em trios, que foram designados pelos próprios alunos. Neste trabalho, trazemos algumas resoluções de alunos a esta proposta.

### **Análise de Dados**

Analisamos enunciados dos alunos de acordo com o Jogo de Vozes e Ecos (BOERO; PEDEMONTE; ROBOTTI, 1997). Assim, apresentamos os dados categorizados em: ecos superficiais, ecos mecânicos e ecos de assimilação.

#### **ECOS SUPERFICIAIS**



Embora o material impresso explicasse que o grau de um vértice é escrito como  $g(v)$ , onde  $v$  é o vértice analisado, a mesma dupla não conseguiu utilizar a notação adequada e fez uso de um registro próprio para expressar esse conceito. Ainda que os números utilizados (3 e 4) apontem para uma identificação da quantidade de arestas que incidia em cada vértice, a presença do símbolo de grau ( $^\circ$ ) retoma a confusão entre nomenclaturas da Geometria e da Teoria dos Grafos. Além disso, a dupla só expressou o grau de três dos quatro vértices, como se pode perceber ao associar as figuras 2 e 3.

3) Enumere os vértices do seu grafo com letras do nosso alfabeto (A, B, C, ...) e em seguida, diga qual o grau de cada um desses vértices.

3AG; 3BG; 4CG

Figura 3: Eco superficial emitido durante a resolução da terceira questão  
Fonte: SÁ, 2014, p. 68.

Além de todos os indícios apresentados, a dupla também apresenta uma incoerência, quando na resposta da primeira questão indica que o grau do vértice C é maior que noventa graus e na terceira questão ela informa que o grau desse vértice é 4. Sendo assim, podemos perceber que a dupla em questão apresenta todas as características do eco superficial apresentadas em Boero, Pedemonte e Robotti (1997).

A confusão entre conceitos de Geometria e de Teoria dos Grafos foi recorrente não só na primeira questão. Ao dizer que as arestas são “encontro de duas faces”, outra dupla também manifestou as características do eco superficial, pois não soube interpretar o texto e retirar de lá uma definição mais adequada para arestas.

c) Arestas: Encontro de duas faces.

Figura 4: Eco superficial emitido durante a definição de arestas.  
Fonte: SÁ, 2014, p. 69.

Percebemos que o enunciado apresentado na figura 4 está correto, mas não faz sentido no contexto da Teoria dos Grafos. À luz da teoria de Bakhtin (2008) e de Wittgenstein (1975), podemos dizer que este discurso se apropria, indevidamente, de outras vozes e que é emitido num contexto incorreto.

### ECOS MECÂNICOS

Segundo Boero, Pedemonte e Robotti (1997), os ecos mecânicos acontecem quando os alunos repetem ou parafraseiam a voz verbal ou a solução correta de um exercício padrão. É o que aconteceu com uma das duplas observadas, quando tentaram definir grafos, conforme

exposto na figura 5. Nota-se que o conceito apresentado pela dupla é uma transcrição das informações apresentadas no texto. Não houve preocupação sequer em alterar a flexão do verbo “simular”, que fora escrito exatamente como consta na voz do narrador.

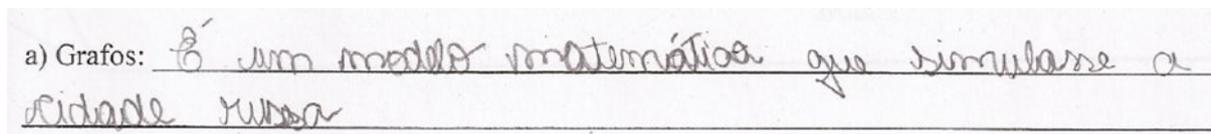


Figura 5: Eco mecânico emitido durante a definição de grafos.  
Fonte: SÁ, 2014, p. 69.

Outra característica dos ecos mecânicos apresentada em Boero, Pedemonte e Robotti (1997) é que o estudante não ultrapassa este nível se não for incapaz de explorar o conteúdo e/ou o método transmitido pela voz, a fim de resolver um problema que difere, em certa medida, da situação inerente à voz. Essa característica se manifestou em uma das duplas que seguiu as orientações e elaborou um modelo matemático para o Problema das Sete Pontes de Konisberg (Figura 6), mas que não conseguiu se apropriar da ideia apresentada para aplicá-la no Problema das Seis Pontes de Vitória (Figura 7).

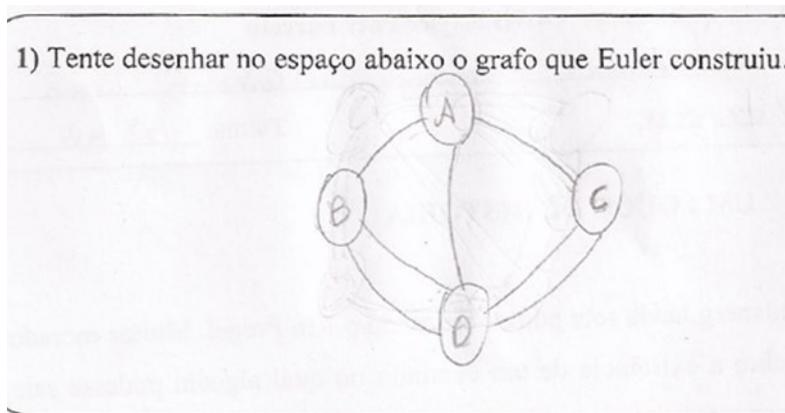


Figura 6: Resolução da primeira questão por uma das duplas.  
Fonte: SÁ, 2014, p. 70.

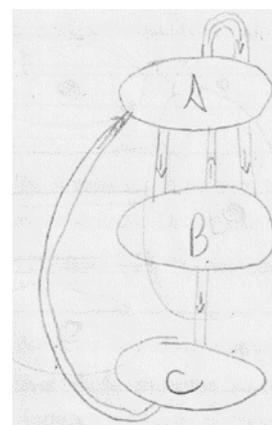


Figura 7: Tentativa de resolução do Problema das Pontes de Vitória.  
Fonte: SÁ, 2014, p. 70.

Nesse exemplo, há um discurso objetivado, pois o aluno demonstra identificar as informações e o contexto no qual o enunciado está inserido. Em contrapartida, não há apropriação dessas informações e nem inserção no contexto do citado, já que ele não foi capaz de empreender seus conhecimentos em uma atividade que em pouco se diferenciava da original.

### ECOS DE ASSIMILAÇÃO

Os ecos de assimilação podem ser detectados quando o aluno é capaz de utilizar o conteúdo e/ou método transmitido pela voz para outras situações problemas propostas, que

são parcialmente semelhantes ao inerente à voz. No caso da figura 8, percebemos que a inserção de palavras que não estavam presentes na narrativa entregue aponta para um processo de apropriação do discurso e produção de um novo enunciado, que é gramaticalmente adequado à situação proposta.

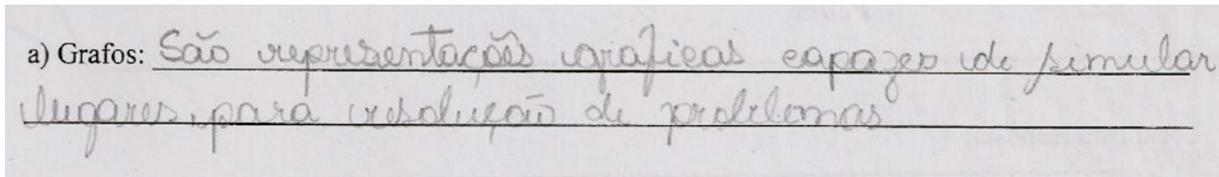


Figura 8: Eco de assimilação emitido durante a definição de grafos.  
Fonte: SÁ, 2014, p. 71.

No enunciado da figura 8, não conseguimos delimitar o enunciado do citante e o do citado. Com efeito, verifica-se que, nesses discursos, os alunos produziram um discurso bivocal, o que evidencia a compreensão e apropriação dos enunciados anteriores.

### Considerações Finais

Após a aplicação da atividade que narra o processo de criação da Teoria dos Grafos, observamos que os alunos produziram ecos de diferentes tipos. Os ecos superficiais foram marcados pela não compreensão da voz do narrador e pela confusão entre as nomenclaturas utilizadas na Teoria dos Grafos e na Geometria. Isso oportunizou uma revisão do material na pretensão de destacar as diferenças entre os termos arestas e vértices, em função de cada contexto. Os ecos mecânicos caracterizaram o grupo de alunos que apenas consultou o material entregue sem que houvesse apropriação do conteúdo trabalhado. É interessante destacar a hegemonia histórica que a geometria tem em relação à Teoria dos Grafos. Isto, de certa forma, justifica o equívoco dos alunos, que já se apropriaram dos conceitos de Geometria, quando são apresentados às terminologias da Teoria dos Grafos. Os ecos de assimilação, embora em menor quantidade, mostraram que a utilização de conceitos antes de uma apresentação formal potencializa o processo de compreensão do discurso, uma vez que após vivenciarem uma situação alusiva à criação da Teoria dos Grafos, alguns alunos conseguiram se apropriar melhor dos conceitos apresentados.

Algumas contribuições da História da Matemática na abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio são de caráter cognitivo e social. Por caráter cognitivo, entendemos que os ecos produzidos pelos alunos durante a atividade proposta apontam para uma apropriação do conhecimento facilitado por meio do uso da História da Matemática. Por caráter social,

destacamos que a perspectiva histórica nos permite mostrar que a matemática é uma ciência em contínuo desenvolvimento e que este processo é fruto de trabalho de todas as pessoas.

### Referências

BAKHTIN, M. **Problemas da poética de Dostoiévski**. Tradução de Paulo Bezerra. 4. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2008.

BOERO, P. *et al.* The "voices and echoes game" and the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a vygotskian perspective: ongoing research. In: PME CONFERENCE, 22nd, 1998, África do Sul. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <<http://www.dm.unito.it/semdidattica/2011/app/boero22.pdf>>. Acesso em: 21 out. 2013.

\_\_\_\_\_. Il "gioco voci-echi" come metodologia per la mediazione degli aspetti salienti delle teorie. In: Internuclei Scuola Dell'obbligo, IV, 2001, Itália. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <<http://www.math.unipr.it/~rivista/guzzoni/AVVENIMENTI/PDFMONTICELLI/BOERO.PDF>>. Acesso em: 15 jan. 2014.

BOERO, P.; PEDEMONTE, B.; ROBOTTI, E. . Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a vygotskian perspective. In: PME CONFERENCE, 21nd, 1997, Finlândia. **Anais eletrônicos...** Disponível em: <<http://www.dm.unito.it/semdidattica/2011/app/boero21.pdf>>. Acesso em: 21 out. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2002.

\_\_\_\_\_. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2006.

DYNNIKOV, C. M. S. da S.; SAD, L. A. **Uma abordagem pedagógica para o uso de fontes originais em História da Matemática**. Guarapuava: SBHMat, 2007.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo Básico Escola Estadual - Ensino médio: área de Ciências da Natureza**. Vitória: SEDU, 2009. v. 2. Disponível em: <[http://www.educacao.es.gov.br/download/SEDU\\_Curriculo\\_Basico\\_Escola\\_Estadual.pdf](http://www.educacao.es.gov.br/download/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual.pdf)>. Acesso em: 06 out. 2012.

FIORIN, J. L. **Introdução ao pensamento de Bakhtin**. São Paulo: Ática, 2008.

GARUTI, R. A Classroom Discussion and a Historical Dialogue: a Case Study. In: PME CONFERENCE, 21nd, 1997, Finlândia. **Anais...** Disponível em: <<http://www.seminariodidama.unito.it/2011/app/garuti21.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2014.

GOTTSCHALK, C.. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Caderno de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

JURKIEWICZ, S. **Grafos: Uma introdução**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007. N. 5. Parte integrante da coleção de 2007. Também disponível em <<http://www.obmep.org.br/>>

export/sites/default/arquivos/apostilas\_pic2010/Apostila5-grafos.pdf>. Acesso em: 26 mai. 2012.

LOPES, M. L. M. L. (coord.) **Grafos: jogos e desafios**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A.. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MOTTA, C. D. V. B. **História da Matemática na Educação Matemática: espelho ou pintura?**. Santos, SP: Comunicar, 2006.

SÁ, L. C. e. **História da Teoria dos Grafos e algumas contribuições no Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, 2014.

SÁ, L.C. e. ; SILVA, S. A. F. da. . Uso de carta histórica para abordagem da Teoria de Grafos no Ensino Médio. In: XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2015, Tuxtla Gutiérrez. **Presentaciones**, 2015.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C.. **Introdução à Análise Combinatória**. 4 ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

WITTGENSTEIN, L.. **Investigações filosóficas**. Tradução de Philosophische Untersuchungen. São Paulo: Abril Cultural, 1975.