As Diferenças Formas de Registro de Funções Exponenciais

[1]Talmo Moraes Lucas, [2]Jorge Henrique Gualandi

[1]talmomoraes@gmail.com

[2]IFES – Brasil
jhgualandi@ifes.edu.br

Palavras-chave:

Registros de Representação; Funções Exponenciais; Semiótica.

Keywords

Representation Registers; Exponential functions; Semiotics.

RESUMO

O artigo apresenta um estudo realizado no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Espírito Santo, campus de Cachoeiro de Itapemirim/ES, com alunos do Ensino Médio do curso de eletromecânica. O estudo busca avaliar a capacidade de conversão e de tratamento em diferentes formas de registro de funções exponenciais, tendo como base a teoria de Duval dos registros e representações semióticas. Além disso, o texto apresenta resultados encontrados na pesquisa com os educandos, que possuem maior relevância com a teoria de Duval, bem como as conclusões sobre a capacidade de transição e tratamento observada nos alunos.

ABSTRACT

The article presents a study in the Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Espírito Santo, Cachoeiro Itapemirim / ES with high school students of the course of electromechanical. The study evaluate the conversion and treatment capacity in different forms of registration exponential functions, based on the theory Duval records and semiotic representations. In addition, the paper presents results found in the research with students, which have greater relevance to the theory of Duval, and the conclusions on the transition capacity and treatment capacity observed in students.

1. Introdução

É comum ouvir que pessoas têm dificuldade de interpretação e, por esse motivo, não conseguem resolver problemas matemáticos. No entanto, pessoas que leem bem e têm facilidade com a linguagem natural nem sempre interpretam e resolvem problemas matemáticos. Por esse motivo deve haver outros fatores que dificultam a aprendizagem matemática.

Diante desse questionamento, procurou-se analisar quais são essas dificuldades que os alunos apresentam, ao lidar com funções exponenciais e suas diversas representações, bem como a transição entre essas representações. Para tanto, foi usada como base nesta pesquisa a teoria das representações semióticas, proposta por Duval, que mostra a matemática como uma língua.

Também procurou-se verificar como as diferentes formas de registro de representação de um mesmo problema podem facilitar o estudo de matemática e, principalmente, a transposição entre uma representação de registro, na linguagem natural, para outra representação de registro, a fim de solucionar ou facilitar a solução do problema.

2. Semiósis e Tratamento de Funções Exponenciais

Duval, em sua teoria das representações semióticas, mostra a matemática como uma língua, que possui suas próprias regras e peculiaridades, composta de gráficos, expressões algébricas, tabelas, entre outros, que dentro de um contexto matemático tem seus significados. Porém, para pessoas que não os conhecem, é como tentar ler uma frase escrita fora da língua natural. Dessa forma, a dificuldade encontrada por alguns alunos na disciplina de matemática pode estar ligada, especificamente, a uma falta de compreensão da mesma, pois, segundo Duval (2011, p. 9),

> […] os problemas específicos de compreensão que os alunos enfrentam na aprendizagem da matemática têm sua origem na situação epistemológica particular do conhecimento matemático, e não somente nas questões de organização pedagógica das atividades.

Essas diferentes formas de representação, apontadas por Duval como registros de representação semiótica, acabam gerando grandes dúvidas nos alunos, pois em sua maioria, os educandos têm grandes dificuldades em transitar entre esses registros de representação, conforme aponta Dominoni (2005, p. 74):

> […] os alunos conseguiram encontrar a regularidade dos dados da tabela, verificamos isto por meio de suas verbalizações, mas tiveram dificuldades para representar esta

> regularidade por meio de uma expressão algébrica, ou seja, de realizar a conversão do registro tabular para o registro algébrico.

Segundo Duval, a importância das representações semióticas dentro do contexto matemático se dá principalmente por dois motivos: A) a questão do tratamento sobre os objetos matemáticos, pois esse se estabelece por meio de um sistema de representação; por exemplo, quando se quer realizar cálculos com as operações básicas, recorre-se ao sistema de numeração decimal. B) o fato de os símbolos ou objetos matemáticos não serem diretamente perceptíveis aos olhos, como é o caso de uma função exponencial, que determina o decaimento radioativo de certo material, e, por isso, esses objetos dependem de um significado.

Dessa forma, existe a necessidade em distinguir os objetos (números, funções, retas, etc) de suas representações ou escritas (decimais ou fracionários, os símbolos, os gráficos, traçados de figuras e outros), para compreender-se melhor a matemática, afinal um mesmo objeto pode ter várias representações.

Para Duval (1995 apud. FEIO, 2009, p. 4),

> […] a compreensão em Matemática implica na capacidade que um sujeito deve ter de mudar de registros o mais naturalmente possível, mantendo-se em referência o mesmo objeto matemático denotado.

No entanto essa transição entre registros mantendo um mesmo objeto, não é uma tarefa fácil, porque é necessário conhecer bem o objeto matemático estudado e suas várias formas de representação, por isso Duval afirma que quem tem essa capacidade compreende matemática. Diferentes formas de representação de um problema implicam em dificuldades diferentes na hora de resolvê-los.

Por esse motivo, para resolver um problema, muitas vezes transita-se entre diferentes representações, a fim de tratar[1] o problema e encontrar uma solução, por isso os objetos matemáticos só são acessados por meio de suas representações.

Conforme aponta Duval (1995, p.17 apud FEIO, 2009, p. 4),

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem elas relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou gráficos cartesianos e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para um sujeito que as utiliza […]

Sendo assim, a matemática é uma linguagem, com suas regras e características, mas nem sempre os alunos apresentam conhecimento dessa linguagem, e, por isso, é percebida uma grande dificuldade na compreensão e resolução de problemas matemáticos.

[1]Tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas.

Os objetos matemáticos são apresentados aos alunos de maneira diferente dos objetos das outras disciplinas, como destaca Duval (2011), pois a matemática é pensada como um instrumento a ser utilizado por outras disciplinas, para isso é preciso ir além de uma aprendizagem tecnológica de procedimentos, é necessário um desenvolvimento cognitivo em que o aluno perceba, imagine, desenvolva, memorize e pense, havendo então, uma busca pelo conhecimento.

Com base nesses pensamentos, procurou-se verificar tal teoria dentro do estudo de funções exponenciais, em uma turma de Ensino Médio, do curso de eletromecânica do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, campus Cachoeiro de Itapemirim.

O assunto de funções foi escolhido devido a sua grande importância dentro da Matemática e também a seu aparecimento em outras ciências como Física, Biologia, Economia, por serem usadas para descrever e estudar um decaimento radioativo, comportamento de uma população de bactérias, juros compostos, entre outros.

É comum os educandos apresentarem dificuldade em trabalhar com os diversos registros que podem ser associados a cada tipo de função, principalmente para aqueles que são resistentes ao aprendizado de Matemática, talvez pela falta de conhecimento ou pela falta de visualização dos conteúdos de matemática. Saber como as funções são aplicáveis em situações cotidianas pode ser um ponto favorável à compreensão do assunto.

O trabalho feito com funções permite desenvolver algumas competências apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), que são importantes no ensino de matemática e podem ser relacionadas à teoria de Duval. Tais competências são (BRASIL, 2000, p. 46):

⇒ ler e interpretar textos em Matemática.

⇒ ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).

⇒ transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc) e vice-versa.

⇒ Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

A função exponencial pode ser apresentada no Ensino Médio como crescimento de uma população de bactérias, representação de juros compostos, crescimento de uma planta, entre outras, tornando-o fácil de ser contextualizado e representado por meio da linguagem natural. Pode-se também representar funções exponenciais através de tabelas, gráficos ou por meio de uma expressão algébrica, podendo, assim, trabalhar a transição e tratamento nessas diferentes formas de representação.

Segundo Duval (2003 Apud. DOMINONI 2005, p.108),

> [...] a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação [...]

Duval ainda diz que é necessário adquirir uma visão global e qualitativa para que haja uma compreensão acerca de um objeto matemático. Nessa mesma linha de raciocício, Dominoni (2005, p.110) afirma:

> [...] pensar na Função Exponencial, implica em pensar, por exemplo, sobre o valor da base, o aspecto do gráfico, algumas características da função e situações problema que podem estar associadas a estas características. Neste sentido, as atividades de coordenação parecem ser de fundamental importância.

É possível perceber, com isso, as várias possibilidades de trabalhar a teoria de Duval dos registros de representação semiótica com funções exponenciais.

3. Metodologia

O trabalho foi feito com base na metodologia da engenharia didática. Para isso, foram realizados os seguintes procedimentos:

⇒ Análises preliminares - verificação do conhecimento prévio dos alunos acerca de funções exponenciais através de um exame com duas atividades, nas quais procura-se trabalhar com algumas das formas de registro das funções exponenciais, a fim de analisar e pontuar as dificuldades dos discentes sobre o tema;

⇒ Concepção e análise a priori - planejamento da sequência didática, buscando definir as variáveis que estarão sob controle e as que são pertinentes à verificação a hipótese;

⇒ Experimentação - coleta de dados por meio de um exame e observações feitas durante a realização do mesmo. Nessa etapa será feito um novo exame com os participantes, dessa vez com o intuito de verificar não só o conhecimento sobre o tema, mas a capacidade de transição e tratamento em diversas representações;

⇒ Análise posteriori e validação - analisar os dados e descrever os resultados encontrados.

4. Análise dos Resultados

4.1 Análise a Priori do Primeiro Exame (Atividade 1 e 2)

A atividade 1 e 2 tem por objetivo abordar as representações na forma algébrica, gráfica e tabelas, de funções exponenciais, trabalhando com as relações existentes entre elas. Na atividade 1, foi trabalhada a função crescente $y = 2^x$, enquanto na atividade 2, a função decrescente $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Em ambas as atividades, para realização do item a, o aluno deveria preencher uma tabela, na qual foi apresentada alguns valores para X e outros para Y. Em seguida, na questão b, o objetivo era verificar se os educandos conseguiam perceber que sempre que o valor de X aumenta, Y também aumenta, na atividade 1; e que diferente da primeira atividade, na segunda, os valores de Y diminuem quando os valores de X aumentam.

Ao serem questionados sobre a existência de algum valor de X que conduz a valores negativos de Y (item c das duas atividades), esperava-se que os alunos analisassem a tabela e verificassem que não existe valor de X que conduz a um valor negativo em Y.

Solicitados então a justificarem suas respostas, a fim de verificar se os alunos relacionam as respostas com os conceitos e propriedades de potência, nas quais um número real positivo diferente de zero elevado a qualquer expoente real terá como resposta sempre outro número real positivo diferente de zero. Em seguida, o item d, questiona se existe algum valor de X, cujo resultado de Y seja zero, completando a ideia explorada no item anterior.

Quando pedido que realizassem a representação gráfica da função trabalhada (item e), buscou-se verificar se os alunos conhecem a curva descrita por essa função, tanto quando a curva é crescente na atividade 1, como quando a curva é decrescente na atividade 2, além de verificar se eles irão relacionar as respostas dos itens anteriores com a representação gráfica. Os itens f e g da atividade 1 e os itens i e j da atividade 2, foram relacionados aos itens c e d, com o objetivo de atentar os alunos para o fato de que Y será sempre maior que zero a função não terá pontos no 3º e 4º quadrante, nem tocará no eixo X.

Na atividade 2, o educando foi questionado no item f o porquê do gráfico não tocar o eixo X e não ter pontos nos quadrantes 3 e 4, com o objetivo de alertá-lo a analisar sua representação gráfica e responder de forma mais crítica os itens i e j. Além disso, foi pedido para que eles comparassem os gráficos construídos no item e de cada atividade, a fim de identificarem diferenças e tentarem justifica-las. Esperou-se com isso que alguns notassem que a base da função exponencial determina se a função será crescente ou decrescente.

Por fim, o item h da atividade 1 buscou verificar se o alunos relacionam, quando os valores de X aumentam os de Y também aumentam (resposta do item b), determinando uma função crescente, similar ao item j da atividade 2, que verifica se os alunos relacionam quando os valores de X aumentam o de Y diminui.

Ao final da atividade 2, foi solicitado que os alunos descrevessem uma comparação feita entre as duas funções, observando talvez que as bases estavam invertidas e por esse motivo chegou-se à algumas diferenças notáveis entre as funções.

4.2 Análise a Posteriori do Primeiro Exame (Atividade 1 e 2)

Como esperado, os alunos não apresentaram tantas dificuldades nessas atividades. No item a, de ambas as atividades, todos os alunos a executaram com precisão e coerência, inclusive no trabalho com os valores negativos de X. Consequentemente, no item b, também não apresentaram dificuldade e todos os participantes apresentaram respostas conforme o esperado. Apenas o participante A12 relacionou o decaimento de Y com uma progressão geométrica na atividade 2, que é válido para os casos em que X é um número inteiro.

Nos itens c, apesar de todos afirmarem que não existe valor de X que conduziria a valores negativos de Y, quando questionados sobre o motivo desse acontecimento, nem todos foram capazes de justificar com clareza, e as respostas foram como a apresentada pelo participante A23, que argumentou, "pois os valores de Y sempre serão maior que 0, pois o valor de X mais negativo possível vai ser um decimal gigante, muito próximo de 0 mas nunca será nem zero nem negativo."

Quando questionados sobre a existência de algum valor de x que conduz a um valor de Y=0 (item d das duas atividades), todos os participantes coincidiram suas respostas e disseram "não".

Solicitados sobre a representação gráfica da função $y = 2^x$ no item e, a maioria das respostas estava coerente. No entanto, algumas representações gráficas apresentavam erros de escala, por isso alguns gráficos que pareciam retas. Também foram constatados casos que não coincidiram com as respostas dos itens anteriores, como o caso do participante A15, que tinha em seu gráfico da função $y = 2^x$ um ponto no terceiro quadrante e, portanto sua curva cortava o eixo X. O participante A6 também se equivocou ao construir o gráfico, porque o mesmo apresentou dois gráficos para a função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, sendo o primeiro correspondente aos valores negativos de X e o outro para os valores positivos de X. O aluno desenhou ambos os gráficos tangenciando o eixo Y, quando os valores de X estavam próximos de zero, e também tangenciando o eixo X, quando os valores de X tendiam a mais infinito ou menos infinito.

Na atividade 2, ao perguntar o porquê de o gráfico não tocar o eixo X e não possuir pontos no 3º e 4º quadrantes (itens f e g), dois educandos (A19 e A21) não souberam responder. Os demais disseram que isso ocorre, pois Y nunca será negativo nem igual a zero nessa função, conforme se esperava.

Ao compararem o gráfico da atividade 1 com o da atividade 2, no item g da atividade 2, muitos alunos disseram "não sei", outros tentavam explicar e diziam que o motivo da diferença encontrada nos gráficos é porque na primeira atividade foi trabalhado com um número inteiro como valor da base, já na segunda, com uma fração. Alguns relacionaram com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. O A7 chegou a responder que "o gráfico acompanha a equação, enquanto um aumenta o número a outra aumenta seu divisor". Houve alunos que se confundiram e afirmaram que os gráficos eram diferentes, pois uma função era a inversa da outra. Poucos alunos relacionaram corretamente o fato de o gráfico das funções serem um crescente e outro decrescente, devido à função da primeira atividade ter uma base maior que 1, já na segunda, uma base entre 0 e 1.

Nos itens f e g da atividade 1 e itens h e i, os participantes que relacionaram o gráfico construído com as respostas dos itens b e c. Novamente, a maioria respondeu de maneira coerente, inclusive os participantes A19 e A21, que, anteriormente, não souberam explicar porque a função não possuía pontos no 3º e 4º quadrante e não tocava o eixo X. Alguns educandos fizeram confusão com termos ou nomenclaturas relacionadas a matemática.

Ao final da primeira atividade, quando comparadas a representação gráfica com o item b, a maioria das respostas afirmaram que os valores de Y aumentam com o aumento de X, alguns responderam que a função é crescente, conforme esperado. Outros responderam que o crescimento da função é como uma progressão geométrica. Porém, nesse caso, o gráfico deveria ser simplesmente pontuado em certos valores e não existiria valores para Y, quando X não fosse um número inteiro, mostrando uma certa confusão dos participantes com alguns assuntos.

No item j da atividade 2, várias respostas foram coerentes e afirmaram que os valores de Y diminuem quando os de X aumentam, ou que a função é decrescente. No entanto, alguns alunos não sabiam expressar corretamente suas respostas, como foi o caso do participante A2, que afirmou "Quanto maior o valor de X, menor era a curva no gráfico". Já o participante

A11 afirmou que "Nesse gráfico o X vai ter um crescimento maior".

Ao final, quando pedido que eles comparassem as funções $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, obteve-se respostas como:

> *A função* $y = 2^x$ *é inversamente proporcional a função* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
>
> *São funções inversas.*
>
> *Que são os inversos, que aplicando o mesmo valor para x, os valores de y das duas equações tendem ao oposto.*

Do total de 23 participantes, 8 responderam conforme o esperado, isto é, que as funções eram uma crescente e outra decrescente.

4.3 Análise a Priori do Segundo Exame (atividade 3)

Essa atividade apresenta um problema na linguagem natural, que relaciona o crescimento de uma folha com seu tempo de vida, na qual buscou-se avaliar a capacidade dos educandos em transitar da linguagem natural para uma representação em tabela, algébrica e gráfica. Para responder a esse problema, foi pedido que fossem realizadas algumas etapas.

No item a, foi solicitado o preenchimento de uma tabela que relacionasse o tempo de vida da planta com o seu diâmetro. Dessa forma, exigiu-se uma conversão da linguagem natural para uma representação tabular e, consequentemente, foi cobrada uma interpretação a situação problema, além do conhecimento das operações matemáticas. Acredita-se que não haja dificuldade nessa atividade, já que os alunos devem escolher valores inteiros para o tempo, tornando mais fácil encontrar os valores correspondentes para o diâmetro.

Em seguida, os alunos deveriam determinar o tamanho do diâmetro, caso a planta sobrevivesse por 6 meses (item b), depois qual deveria ser o tempo de vida da planta para que atingisse 81 cm (item c). Novamente, acredita-se que os alunos não tenham dificuldade, e espera-se como resposta 729 cm para o item b e 4 meses para o item c.

No item d é esperado que o aluno encontre uma expressão algébrica que represente o problema abordado e que eles comparem os valores obtidos nos itens anteriores. Nesse item, acredita-se que haverá uma certa dificuldade para que eles determinem corretamente o que foi pedido. Espera-se como resposta algo similar a $y = 3^x$.

O item e busca estimular o educando a revisar sua resposta do item d, além de tentar identificar o conhecimento dos participantes a respeito de funções. Dessa forma, no item f, pediu-se a construção do gráfico que represente a função que deveria ser a resposta do item d. No entanto, o objetivo é o de verificar se os alunos percebem que a função tem um início e um fim, já que a planta só sobrevive por 4 meses e 12 dias. No item g, os alunos deveriam relacionar essas ideias aos conceitos de domínio e imagem.

No item h, os educandos deveriam relacionar esse item com o item d, do primeiro exame, e simplesmente afirmar que y nunca será igual a zero, já no item seguinte, foi analisado se os alunos percebem que quando X = 0, ou seja, o início da contagem do tempo de vida da planta, Y deve ser igual a 1, que representa o tamanho inicial da planta.

Por fim, no item j, foi pedido que o aluno respondesse a questão proposta no enunciado do problema, além disso, objetiva-se perceber se eles relacionam o tempo de 12 dias com 0,4 meses, ao responder o enunciado e, com isso, espera-se que eles respondam algo como $3^{4,4}$ cm ou 125,70 cm.

4.4 Análise Posteriori do Segundo Exame (atividade 3)

No primeiro item dessa atividade, quase todos os alunos preencheram a tabela corretamente, com exceção do participante A14 que começou a contagem do tempo em 1 e não em zero. Além disso, 8 participantes apresentaram um tempo igual a 5 meses, o que é impossível, já que a planta só sobrevive por 4 meses e 12 dias. Quando questionados sobre o tamanho que a planta teria, se sobrevivesse durante 6 meses todos os participantes acertaram.

No item seguinte, 22 alunos responderam conforme o esperado e 1 aluno não respondeu. Já no item d, os participantes A11 e A22 foram os únicos que representaram de forma errada a expressão que determina o diâmetro da planta depois de X meses; os dois participantes responderam que o diâmetro da planta é representado por y^x , no entanto, quando realizaram os cálculos anteriores, foi possível perceber que utilizaram 3^x. Os demais participantes responderam conforme o esperado.

Apesar de poucos participantes terem errado o item d e terem identificado que a expressão descrita nele representa uma função, vários alunos não sabiam identificar o porquê tal expressão representa uma função, como o caso do participante A2, que disse: "A equação é uma função, pois há uma icógnita (x) elevando um número (3)", ou até mesmo o participante A9, que trocou as noções de domínio e imagem quando afirmou que "(...) X (meses) está em função de Y (diâmetro)".

Nas respostas do item f, tivemos 3 alunos que desenharam o gráfico fora de escala. Além disso, no gráfico de outros 7 participantes é possível encontrar parte da curva do gráfico no 2º quadrante, o que não deveria ocorrer pois a função estava relacionada com o crescimento de uma planta ao longo do tempo. Portanto devemos descartar valores de tempo negativo. Isso se torna ainda mais evidente quando questionados qual o domínio e qual a imagem da função, e a maioria dos alunos respondeu errado Nos itens h e i, com exceção dos alunos, A16 que respondeu errado o item i, e o A12 que não respondeu o item i, todos os demais alunos responderam conforme o esperado a esses itens.

No último item da atividade 3 (item j), perguntava o tamanho da planta ao final dos 4 meses e 12 dias. Para este item, tivemos apenas 3 respostas corretas, e outras 2 que fizeram a atividade corretamente mas erraram durante o tratamento. Os demais educandos calcularam o tamanho que a planta teria depois de 4 meses mas não sabiam o que fazer com os 12 dias que restavam. A maioria dos alunos tentou resolver por regra de três, calculando uma proporção entre o tamanho da planta e o tempo de vida, deixando claro que eles não perceberam que, o diâmetro é proporcional a 3^x e não simplesmente ao tempo de vida X.

5. Considerações Finais

Os sistemas de representação semióticos são parte fundamental no aprendizado de matemática, pois é através de modelos de representação que se consegue aprender matemática. O modelo de representação nem sempre é o essencial, mas sim a forma como o modelo está sendo utilizado, se este está de acordo com o assunto estudado, ou seja, se o estudante consegue fazer a conversão entre os registros de forma correta e espontânea.

Durante as análises foi possível perceber que alguns estudantes tinham uma boa definição de funções exponenciais, no entanto, ao mudarem de representação não aplicavam essas definições, como por exemplo, quando afirmavam que o valor de Y seria sempre positivo, mas ao desenharem o gráfico, esse cortava o eixo X, mostrando que Y assumiria valores negativos.

Com isso, pode-se perceber que alguns desses alunos sabem tratar o problema utilizando certo modelo matemático, porém, quando é necessário fazer uma conversão para outro modelo de representação, o aluno se perde, não associando que, apesar de ocorrer uma mudança de representação, o objeto matemático em questão continua sendo o mesmo, ou seja, para Duval esse aluno não compreende matemática.

Referências

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. Utilização de diferentes registros de representação: Um estudo envolvendo funções exponenciais. 2005. 122f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2005.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros e representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alvez Dias. 1 ed., São Paulo PROEM, 2011.

FEIO, Evandro dos Santos Paiva. A conversão da língua natural para a linguagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) Universidade Federal do Pará, 2009.

BRASIL. MINISTÈRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio: Parte III. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: Brasília (DF), 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>