



Circunferências ou Retas na Esfera? Visualizando-as no Cabri 3D

Circumferences or Straight Lines in the Sphere? Visualizing Them in Cabri 3D

¹José Carlos Pinto Leivas

¹Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – Brasil
leivasjc@unifra.br

Palavras-chave:

Circunferências. Esfera. Cabri 3D. Visualização.

Keywords

Circumferences. Sphere. Cabri 3D. Visualization.

RESUMO

Apresentamos uma investigação, de cunho qualitativo, realizada durante uma disciplina de Geometria oferecida a um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, na qual o investigador é o professor responsável. O objetivo da pesquisa foi verificar como os alunos visualizavam curvas e triângulos numa superfície esférica, as denominadas geodésicas, e triângulos esféricos. A partir dos registros escritos dos estudantes, todos professores em ação, encaminhados via e-mail ao investigador, analisamos como eles construíram e resolveram os encaminhamentos dados, utilizando o software Cabri 3D. Concluímos ser possível inovar no ensino de Geometria ao comprovamos uma possibilidade metodológica utilizando o Cabri 3D para desenvolver um conteúdo complexo, se visto apenas teoricamente.

ABSTRACT

In this paper we present an investigation, a qualitative study, conducted during a discipline of Geometry offered to a Professional Master's Degree in Teaching Mathematics, in which the investigator is the responsible teacher. The objective of the research was to determine how students visualize curves and triangles on a spherical surface, called the geodesics, and spherical triangles. Through written records of students, all teachers in action, sent via email to the researcher, was analyzed as they built and solved problems using Cabri 3D. We conclude it's possible to innovate in teaching of Geometry by using a methodology with Cabri 3D teaching a complex content, and it contributed to the development of visual skills.

Introdução

O uso de mídias tem modificado substancialmente o comportamento das pessoas, especialmente no ambiente escolar em que celulares e *tablets* estão constantemente presentes. Entendemos que modificar o ensino centrado no professor, detentor do saber, que tudo passa aos seus alunos, necessita ser repensado, uma vez que esses já trazem consigo um conhecimento grande sobre tecnologias.

Quando os estudantes realizam um experimento e conseguem formular ideias a respeito, elaborando e reelaborando conceitos, produzindo conhecimento, o grau de satisfação que expressam é muito significativo. Para Borba e Villarreal (2006, p. 65, trad. nossa), “um experimento é realizado para descobrir algo desconhecido, para verificar a veracidade de uma hipótese, a fim de aceitar ou rejeitá-la ou fornecer exemplos (ilustrar) de uma verdade conhecida, todas as ações que, nem matemáticos, nem os alunos poderiam dizer que eles nunca fizeram”.

Os autores dizem que “podemos afirmar, sem sombra de dúvidas, que a tecnologia tem um papel fundamental em relação ao uso de experimentos em matemática, bem como na educação matemática” (p. 67), com o que concordamos integralmente, de acordo com nossa experiência profissional em utilizar softwares para o ensino de Geometria. Um software de Geometria Dinâmica possibilita ao professor desenvolver com seus alunos habilidades visuais, as quais, nem sempre, são tão rápidas e eficientes de serem adquiridas com outros recursos, como os materiais concretos. Entendemos por visualização um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, buscando auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos.

Para Arcavi (1999, p. 217), visualização é

a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas além de avançar na compreensão.

Por sua vez, Guzmán (1997, p. 16) define visualização em Matemática como “essa forma

de atuar com atenção explícita às possíveis representações”, enquanto que Presmeg (1986, p. 298) afirma que “Um método visual é aquele que envolve imagem visual, com ou sem um diagrama, como uma parte essencial do método de solução, mesmo se os métodos de raciocínio ou algébrico são ambos empregados”.

Com base no exposto, apresentaremos uma investigação feita com o uso do Cabri 3D, durante a realização de uma disciplina de Geometria, num mestrado profissionalizante, em 2014, na qual tivemos como objetivo verificar como os alunos visualizavam curvas e triângulos numa superfície esférica, as denominadas geodésicas. Todos os participantes são professores da escola básica e já tinham realizado outras atividades no Cabri 3D, em aulas anteriores, o que lhes permitiu ter algum domínio das ferramentas do software, bem como a reconstrução de elementos de geometria espacial.

Compreendemos a investigação como sendo qualitativa conforme apontado por Erickson (1986, apud MOREIRA, 2011, p. 47): “Portanto, uma distinção analítica crucial em pesquisa interpretativa é entre comportamento, o ato físico, e ação, que é o comportamento mais as interpretações de significados atribuídas por quem atua e por aqueles com os quais o ator interage [...]”.

Não testamos nenhuma hipótese previa na investigação o que, segundo Moreira (2011), é característica de estudo qualitativo observacional, uma vez que não buscamos testar nenhuma hipótese e sim desenvolvê-la. Observamos a realização das tarefas e registramos dados para chegarmos às conclusões. Além disso, os indivíduos produziram os próprios registros e os encaminharam via e-mail.

Geometria Dinâmica e o Cabri 3D

Os softwares de Geometria Dinâmica proporcionam, como o próprio nome indica, um dinamismo nas construções geométricas, uma vez que, no caderno virtual, o aluno pode modificar tantas vezes quantas desejar sua construção sem ter de usar a borracha para apagá-la ou amassar a folha para recomeçar uma nova.

Para Domingos (2014, p.14),

a investigação mostra-nos que há benefícios inequívocos na utilização da tecnologia, embora a sua efetiva integração na sala de aula ainda necessite de um trabalho sistemático que integre as ferramentas disponíveis de forma a criar ambientes de aprendizagem autênticos

Ratificamos a afirmação do autor a partir de nossa experiência com o uso sistemático da

tecnologia na disciplina.

Ao abordarem a formação de professores de Matemática, Cury e Oliveira (2004, p.19) afirmam “Muitas vezes, os professores, premidos pelas exigências oficiais e institucionais, levam seus alunos a laboratórios de Informática sem planejar atividades que desenvolvam competências, tais como a de formular hipóteses ou de argumentar”. Acreditamos que, ao propor atividades geométricas, para serem resolvidas com o auxílio do software, o aluno de mestrado pode retomar conteúdos, apossar-se das ferramentas tecnológicas, produzir argumentação e formalizar conceitos.

As autoras afirmam que a relutância docente em utilizar, ainda, as tecnologias não deve mais ser considerada porque os professores são os que podem compreender o que os alunos necessitam e intermediar, no momento propício, o seu processo de aprendizagem, introduzindo conceitos necessários, retomando as construções realizadas e desafiando-os a novas construções.

Os aspectos positivos da sala de aula informatizada, especialmente o da aproximação entre professor e aluno, pela interação e pelos processos colaborativos, faz com que pensemos numa nova postura do professor de Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) indicam que “[...] Isso define uma nova visão do professor, que, longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional” (p. 44).

Entendemos que a escolha de um software é uma opção do professor, em virtude de seu domínio do mesmo e, por isso, optamos para o conteúdo de geometria espacial, usar o Cabri 3D.

Para Fayó (2012), a imaginação colabora com a investigação matemática, pois imaginar estratégias constitui um trabalho cuidadoso do professor, a fim de que ocorra a aprendizagem. A autora utilizou o Cabri 3D para vincular um estudo com a Astronomia, realizando modelagem no software, destacando, ainda, a relevância do mesmo na visualização. Uma facilidade que o Cabri 3D oferece é a manipulação do plano base, de modo que o indivíduo busque o melhor ângulo, o qual lhe permita a visualização do objeto em apreço. Silva (2012) entende que “o ambiente Cabri-3D poderia produzir as representações necessárias para desenvolver a visualização para compreender e resolver problemas em geometria espacial [...]” (p. 28).

Orientamos uma investigação utilizando a metodologia da Resolução de Problemas, com alunos de mestrado, a qual teve por objetivo investigar como eles obtinham e representavam circunferências no espaço utilizando o Cabri 3D. Os resultados mostraram que poucos alunos percebiam possibilidade de obter circunferência pela intersecção de dois objetos espaciais como, por exemplo, cone e plano, esfera e plano e esfera e esfera, o que veio a ocorrer após o uso do Cabri 3D na resolução do problema proposto.

A Pesquisa

No programa da disciplina constam tópicos de geometrias não euclidianas. Foi abordado o conceito de geodésicas - curvas que desempenham o papel correspondente ao de reta na Geometria Euclidiana. Na Geometria Esférica, as 'retas' são as circunferências máximas da esfera, as quais, em analogia ao globo terrestre, correspondem aos meridianos e à linha do equador e todas as que possuem centro no centro da esfera.

O método de coleta de dados se deu pelo registro dos alunos, em seus computadores, tanto com a construção realizada no Cabri 3D, quanto em arquivos utilizando a ferramenta 'Nova vista texto'. Pesquisas experimentais, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 104), têm o seguinte significado: "entendemos por experimento aquela parte da investigação na qual se manipulam certas variáveis e se observam seus efeitos sobre outras". Os autores afirmam que esse tipo de investigação se diferencia de outros, pois nele o investigador pode reproduzir certo fenômeno a ser observado sob seu controle pessoal.

A primeira atividade consistiu em obter seções na esfera por planos, de forma livre. Com isso, nossa preocupação foi verificar como os estudantes visualizavam tais seções. A aluna, aqui identificada por RI, obteve as seguintes conclusões a respeito das interseções obtidas em sua construção:

1. a intersecção da esfera com o plano: **circunferência**;
2. a intersecção da esfera com um plano perpendicular ao original passando pelo centro: **geodésica**, ou seja, maior circunferência; existem infinitas geodésicas;
3. a intersecção da esfera com um plano tangente à mesma: **ponto**;
4. a intersecção da esfera com um plano que não toca a esfera: **vazia**.

Observamos que a aluna conseguiu identificar corretamente as várias possibilidades de seções, desde o conjunto vazio (quando o plano não a cortar), um ponto (quando o plano é tangente), circunferências não concêntricas (embora não tenha afirmado a infinidade dessas) e

as concêntricas, isto é, as geodésicas (caso em que o plano passa pelo centro da esfera – as ‘retas’ da Geometria Elíptica. Ela descreveu o procedimento realizado em sua construção no Cabri 3D:

- ⇒ foi construída uma esfera com centro no sistema vetorial;
- ⇒ foi escolhido um estilo, através do qual fosse melhor visualizá-la (hachuras finas...);
- ⇒ a interseção do plano original com a esfera é uma circunferência;
- ⇒ foi traçado um plano perpendicular passando pelo centro da esfera;
- ⇒ a interseção desse plano com a esfera resultou em uma geodésica (circunferência máxima);
- ⇒ foi traçada uma reta passando pelo vetor no centro da esfera e comandando a interseção dos pontos dessa reta com a esfera, esses pontos são “N” (norte) e “S” (sul);
- ⇒ de forma semelhante foi feito para a definição dos pontos “O” (oeste) e “L” (leste);
- ⇒ para a construção de outra geodésica (que vai de leste a oeste), foram seguidos os mesmos passos utilizados para a construção da geodésica anterior;
- ⇒ o ângulo formado pelo vetor normal e o ponto “L” foi definido criando um vetor normal na reta “r” e desenhando uma perpendicular a essa reta passando por “L” e, nele, foi criado um outro vetor;
- ⇒ o ângulo formado por esses vetores (das retas r e s) e o ponto “L” será 90° ;
- ⇒ o ângulo entre as geodésicas será 90° (ângulo formado pelo vetor normal, ponto “L” e vetor na reta “t” perpendicular ao plano).

As conclusões obtidas por RI reiteram o indicado por Gravina e Basso (2012), segundo os quais, as ferramentas digitais à disposição, atualmente, vislumbram os estudantes e proporcionam a aquisição de novas habilidades.

Como indicou Fayó (2012), a imaginação colabora com a investigação matemática, como ocorreu com a organização da construção realizada por SH para a mesma sequência anterior. Assim, deixar que o aluno utilize o software e sua imaginação permite o desenvolvimento de habilidades visuais, o que é preconizado por Arcavi (1999) como um processo e produto de criação, interpretação, uso e comentário.

No que segue, apresentamos a sequência encaminhada por SH, em atendimento ao solicitado pelo professor aos três itens.

1. Obtenha uma esfera com centro no plano básico e faça diferentes representações visuais para ela.
2. Represente o raio dessa esfera.
3. Analise interseções da esfera com planos. O que resultam dessas interseções – descreva isso.

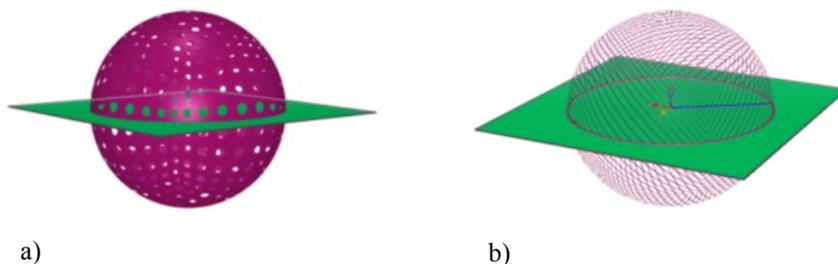


Figura 1. a) Representação da esfera de centro no plano base obtida por SH.
b) Idem para a esfera com o raio e uma circunferência máxima.

A partir dessa construção, a aluna concluiu que a intersecção da esfera com o plano resultou numa circunferência (figura 1) e que, a intersecção da esfera com um plano perpendicular ao original, passando pelo centro, é uma geodésica – circunferência máxima (figura 2).

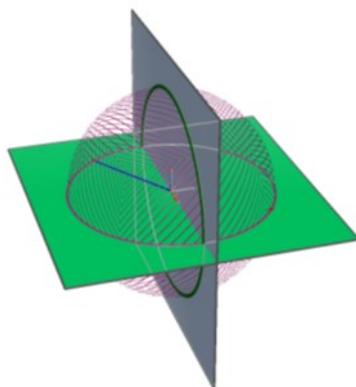


Figura 2. Geodésica obtida pela seção da esfera por plano perpendicular ao plano base. Construção de SH.

Na sequência, a aluna organizou uma construção na qual considerou a esfera como o globo terrestre e assinalou os pontos cardeais N,S,L,O nessa representação. Por fim, obteve uma nova esfera e a circunferência que representava a linha do equador. Indicou a representação do vetor normal e do vetor tangente a essa linha pelo ponto L e calculou o ângulo entre eles, verificando seu valor de 90° .

Para a visualização de triângulos sobre a esfera, o aluno CH encaminhou a seguinte sequência para a sua construção:

1. Construir as geodésicas LO, NS, LN e as interseções duas a duas, denotando-as por A, B e C (figura 3a).

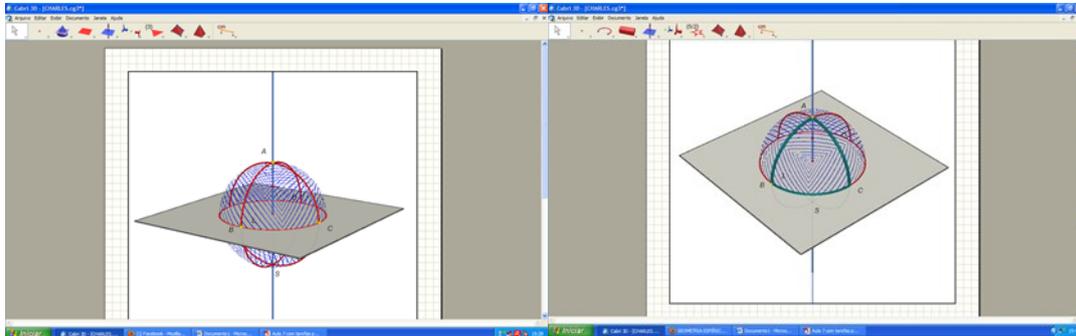


Figura 3. a) Construção do aluno CH para as três geodésicas. b) Construção do triângulo geodésico.

2. Verificar qual é a figura sobre a esfera formada pelos segmentos de geodésicas AB, AC e BC (figura 3b).

O aluno concluiu que a figura formada é um triângulo e essa forma de atuar, utilizando o Cabri 3D, dando atenção explícita às possíveis representações de um triângulo, corrobora a afirmação de Guzmán (1997) quanto ao que podemos entender atualmente sobre visualização em Matemática. Por sua vez, como indicou Presmeg (1986), os métodos visuais envolvendo imagens são formas relevantes de solução de problemas, como no caso indicado por CH, a seguir.

3. Qual é a medida de cada um dos ângulos formados por esses segmentos? E a soma das três medidas vale...

Ele fez a construção constante da figura 4 e concluiu: os ângulos formados pelos segmentos são ângulos retos, logo a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Esférica é 270° . A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, não necessariamente tem este valor, podendo ser maior do que 180° , o que não inviabiliza o procedimento e a conclusão de CH.

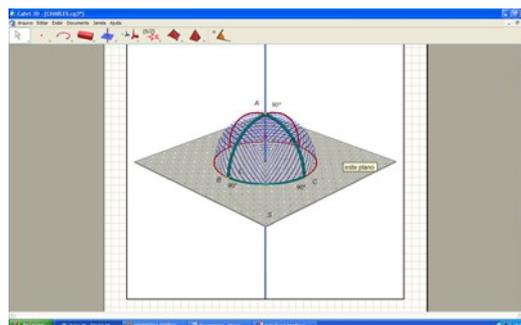


Figura 4. Triângulo esférico tri-retângulo obtido por CH.

Os aspectos inequívocos de que a sala de aula informatizada traz benefícios para o professor, preconizados nos PCN (BRASIL, 1998), foram comprovados nas construções realizadas pelos participantes da pesquisa, pois uma gama enorme de representações e possibilidades de desenvolver um mesmo conteúdo apareceu. Nas construções de IV, a seguir, para o mesmo problema, isso é bem perceptível. Ela encaminha o seguinte:

Construir as geodésicas LO, NS, LN e as intersecções duas a duas, denotando-as por A, B e C.

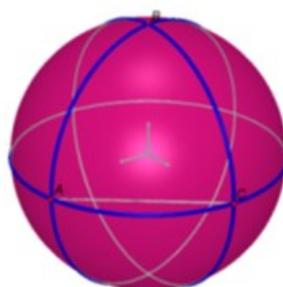


Figura 5. Geodésicas da esfera obtidas por IV.

Observamos que os alunos visualizam os mesmos objetos por meio de formas, cores e representações diferenciadas, e não apenas pelo indicado pelo professor. Na sequência a aluna formaliza:

Ela responde que se trata de um triângulo e finaliza calculando os ângulos entre as três geodésicas nos respectivos pontos de interseção duas a duas, fornecendo sua soma como 270° .

Na sequência da pesquisa, buscamos verificar certos comparativos entre as geodésicas e as retas euclidianas, quando utilizada a projeção estereográfica, ou seja, uma função que leva cada ponto da esfera, com exceção do polo norte no plano. Para tal, foi indicada a tarefa a seguir:

1. Representar a função projeção estereográfica utilizando o Cabri 3D.
2. Representar a projeção estereográfica de circunferências no plano de projeção.
3. Analisar o comportamento dessas circunferências quando se aproximam e se afastam do polo norte e suas projeções.
4. Idem para o círculo máximo [equador].

As figuras 6, a seguir, ilustram a projeção estereográfica obtida por CH.

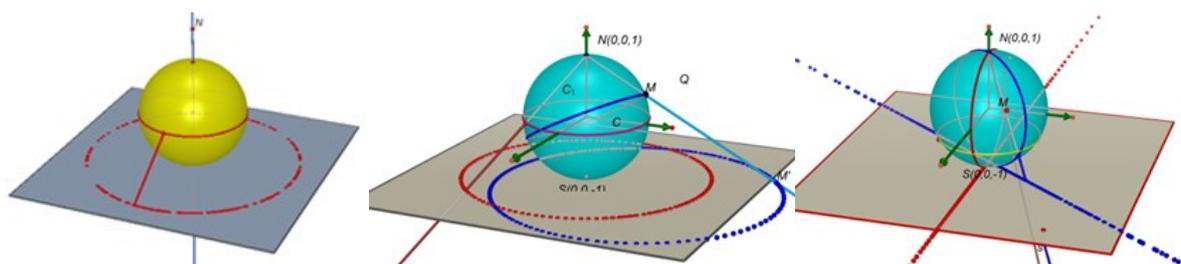


Figura 6. Projeção estereográfica do equador, de circunferências paralelas a ele e de meridianos.

A partir da construção dessas projeções o aluno indicou que, “na medida em que as circunferências se aproximam do polo norte, elas vão diminuindo o raio, logo seu comprimento, até chegar a um único ponto; o contrário ocorre com as projeções nesse caso”, o que está correto. Além disso, indica a projeção de meridianos no plano, ou seja, estabelece relação entre eles e as retas no plano.

Uma construção da projeção que se diferencia das demais é a feita por IZ, constante da figura 7.

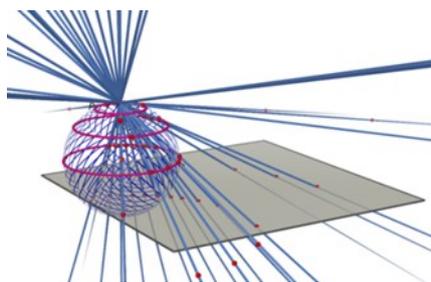


Figura 7. Projeção estereográfica da aluna IZ.

Nessa construção, a aluna obteve interseções das retas que saem do polo norte, passando por pontos das circunferências paralelas à linha do equador. A partir disso, ela explicitou o raciocínio para obter suas conclusões.

Construída uma esfera no espaço.

Construída a circunferência máxima.

Construída as demais circunferências paralelas à circunferência máxima.

Com o ponto P e um ponto de cada circunferência construído as retas, após feito a intersecção das retas com o plano.

A projeção conseguida mostra que quanto mais próximo do ponto P, que é um polo, maior fica o raio da circunferência.

A partir dessas conclusões obtidas por IZ, reitera-se o apontado por Silva (2012) quando afirma que o Cabri-3D pode produzir representações necessárias para desenvolver a visualização, bem como para compreender e resolver problemas em geometria espacial, de

forma similar ao que Fayó (2012) investigou sobre a imaginação, que pode colaborar com a investigação matemática, pois ela propicia imaginar estratégias de resolução.

Finalizando

Apresentamos uma investigação realizada com mestrandos de uma disciplina de Geometria de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, a qual teve por objetivo verificar como os alunos visualizavam curvas e triângulos numa esfera. Empregamos a função projeção estereográfica, para verificar como os alunos percebiam as projeções de circunferências na esfera sobre o plano de projeção, inclusive identificando geodésicas na esfera com retas no plano.

Quanto ao poder do uso de tecnologias para a aprendizagem em Geometria, manifestaram dificuldades iniciais no manuseio do software pela falta de conhecimento do mesmo, a não utilização de softwares na formação inicial e, especialmente, por ser uma forma nova de “mobilizar o conhecimento matemático envolvido” na expressão de alguns. A respeito da construção realizada no Cabri 3D, RI assim se expressou:

muitos conceitos, relações e propriedades geométricas são muito abstratos e sua compreensão é dificultada quando trabalhados apenas conceitualmente, com algoritmos e fórmulas. Nesse sentido, esse software proporciona a visualização, de forma dinâmica, de elementos matemáticos e a construção detalhada de um determinado objeto a partir desses elementos. O aluno tem a possibilidade de ir aprendendo enquanto constrói, desconstrói e manipula o objeto (por exemplo, uma esfera) no espaço tridimensional, podendo visualizar elementos desse objeto que, dificilmente, seriam identificados, detalhadamente, em um desenho. Além disso, essas construções (tridimensionais) permitem esclarecer alguns equívocos e erros cometidos ao longo do tempo.

A reflexão sobre os conceitos tratados nas construções realizadas durante as aulas no laboratório de informática é considerada pelos alunos como um aspecto positivo numa nova abordagem de ensino. Ao refletirem sobre determinados conceitos geométricos, tinham a impressão de que sabiam o conteúdo, mas, quando iam construir e fazer interpretações, surgiam dúvidas a respeito e, a partir das reflexões, muitas concepções e definições foram sendo retomadas durante o processo de construção, desconstrução, manipulação e até com os próprios erros.

SH concluiu suas construções, indicando que “posso destacar que há grandes vantagens no uso do Cabri 3D, visto que esse ambiente amplia o domínio de interpretação de um objeto, em que o aluno, em qualquer grau de ensino, pode construir e manipulá-lo no tridimensional, podendo ter um novo olhar sobre ele e suas características”.

A metodologia utilizada pelo professor é destacada pelos estudantes, os quais indicam a importância dele deixar que :

exploremos o software, primeiramente com os próprios conhecimentos e fazendo questionamentos para que busquemos em nossa 'caixa preta' os conceitos que já tínhamos formalizado. Grande parte dos conceitos ainda estava vaga para mim, o que me preocupa por ser uma educadora, mas com certeza terei aportes para buscar melhoras (IV).

Entendemos que a pesquisa comprovou ser possível inovar no ensino de Geometria e mostramos uma possibilidade metodológica, utilizando o Cabri 3D, para desenvolver habilidades visuais.

Penso que as aulas com o Cabri trouxeram uma nova visão sobre a geometria, pois possibilitaram, a partir dele, rever conceitos que antes eram vagos, porque foram estudados somente na perspectiva do plano. Outro aspecto interessante é que as aulas com o Cabri aguçam a busca e a exploração, além de propiciar uma reflexão dos erros cometidos, seja com o uso do software ou a prática em sala de aula. (CH)

Depoimentos dos estudantes corroboram o que Borba e Villarreal (2006) afirmam a respeito da realização de experimentos que proporcionam certas descobertas. A satisfação pelas descobertas e o desejo de inovar na prática profissional, na escola básica onde atuam, é ponto destacado na investigação, o que nos leva a concluir que o objetivo da pesquisa foi alcançado.

Referências

- ARCAVI, A.. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings...** Disponível em: <<http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>>. Acesso em: 30 set. 2008.
- BORBA, Marcelo C, VILARREAL, M. (org.). **Tendências internacionais em formação de professores de matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. – Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CURY, H.N.; OLIVEIRA, A.M.P. Da saliva e pós de giz ao software de computação algébrica: a difícil adaptação dos professores de matemática às exigências da sociedade informatizada. In: **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. CURY, H.N. (org.). Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004, pp.17-40.
- DOMINGOS, A. O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática. Um exemplo com recurso ao Geogebra. In: **Educação e Matemática**. Lisboa, Portugal, n. 126, 2014, pp.14-16
- FAYÓ, A. N. Imaginação, geometria dinâmica e Cabri. **Anais.... VI Congresso Iberoamericano de Cabri. Iberocabri 2012. ACTAS, 2012, p. 15-22.**
- FIORENTINI, D., LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.
- GRAVINA, M.A. ; BASSO, M.V. de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. GRAVINA, M.A. et al. (org.). Porto Alegre: Evangraf, 2012, pp. 11-36.
- GUZMÁN, M. de. **El rincón de la pizarra, ensayos de visualización en análisis matemática: elementos básicos del análisis**. Madrid: Pirámide, 1997.
- MOREIRA, M.A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- PRESMEG, Norma C. Visualization and mathematical giftedness. **Educational Studies in Mathematics**, v. 17, n. 3, p. 297-311, 1986.
- SILVA, M.J.F. da. A construção de situações problemas utilizando o Cabri 3D. **Anais.... VI Congresso Iberoamericano de Cabri. Iberocabri 2012. ACTAS, 2012, p. 23-37.**