Compactificados equivariantes

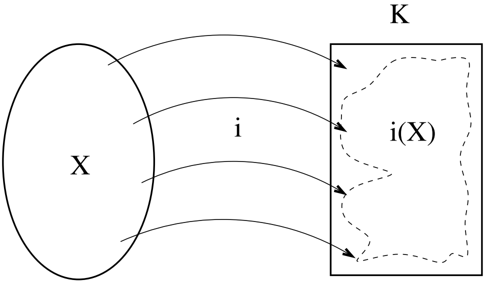
Vladimir Pestov

[1] University of Ottawa / Université d'Ottawa
Ottawa, Ontario, Canadá

[2] Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, SC, Brasil

USP, Workshop de encerramento,
16 do Março 2017

Sejam X um espaço topológico, K um espaço compacto, $i\colon X \to K$ uma aplicação contínua tal que $i(X)$ é denso em K (isso é, a adherência de $i(X)$ é K). Então, o par (K, i) é um *compactificado* de X.



Por abuso da língua: K é um compactificado de X.

Compactificado de Stone-Čech

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \beta X \arrow[d, dotted] \\ & K \end{tikzcd}$$

$C(\beta X) = CB(X)$, βX = espaço de ideais maximais
$\beta X \subseteq CB(X)'$

Compactificados equivariantes

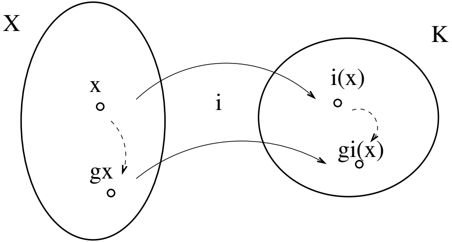
Noção

Seja um grupo topológico G age sobre um espaço X e um espaço compacto K:

$$G \circlearrowright X, \quad G \circlearrowright K.$$

Seja $i\colon X \to K$ uma aplicação contínua *equivariante:*

$$g \cdot i(x) = i(g \cdot x).$$

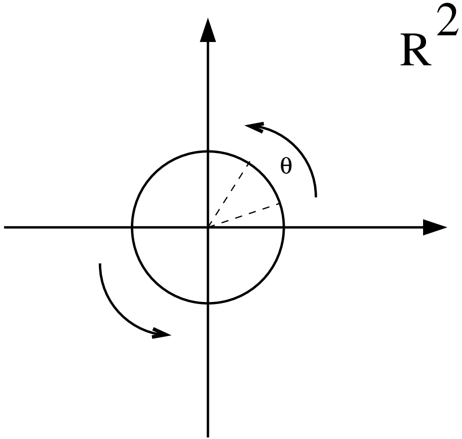


Se a imagem $i(X)$ é denso em K, dizemos que (K, i) é um *compactificado equivariante* de X.

- O compactificado trivial, $X \to \{*\}$, é sempre equivariante.
- O grupo ortogonal $O(\ell^2)$ age sobre a esfera, $\mathbb{S}$, assim que sobre a bola unitária, $\mathbb{B}$, com a topologia fraca. A imerção canónica,

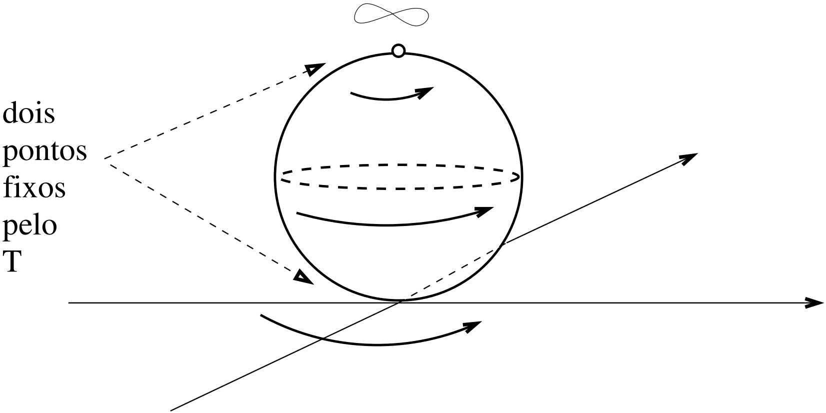
$$i\colon \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{B},$$

e um compactificado equivariante da esfera.



$\mathbb{R}^2$, munido da ação do grupo compacto $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ pelas rotações

Compactificados equivariantes
Exemplos



Compactificado pelo um ponto fixo, ∞. (Compactificado *equivariante*).

Pergunta motivadora

Existe um compactificado equivariante K com $i\colon X \hookrightarrow K$ um homeomorfismo sobre a imagem?

É trivial mostrar a existência do compactificado equivariante universal:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & \beta_G X \arrow[d, dotted] \\ & K \end{tikzcd}$$

Quando i é um homeomorfismo sobre a imagem?
Por exemplo, se G é discreto: a ação de X sobre X estende-se sobre βX, logo

$$\beta_G X = \beta X.$$

Pergunta motivadora

É preciso entender o “tamanho” do compactificado equivariante maximal de X. Notação: $\beta_G X$.

Por exemplo, pode ser que

$$\beta_G X = \beta X,$$

qualquer seja G?

Investigaremos para $\mathbb{T} \circlearrowright \mathbb{R}^2$. É verdade que $\beta_{\mathbb{T}}\mathbb{R}^2 = \beta\mathbb{R}^2$?

Funções RUCB

Se G age sobre um compacto K, então G age sobre o espaço de Banach $C(K)$:

$$C(K) \ni f \mapsto {}^g f \in C(K), \;\; {}^g f(x) = f(g^{-1}x)$$

Esta ação é contínua, particularmente a *aplicação de órbita* é contínua:

$$G \ni g \mapsto {}^g f \in C(K).$$

Isso significa:

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists V \ni e, \;\; \forall x \in K, \forall g \in V, \quad |f(x) - f(gx)| < \varepsilon.$$

Uma função $f \in CB(X)$ se estende sobre $\beta_G X$ se e somente se f satisfaz esta condição.

Funções RUCB

Se $G \circlearrowright X$, então uma $f\colon X \to \mathbb{R}$ limitada, que satisfaz

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \ni e,\ \ \forall x \in K, \forall g \in V,\quad |f(x) - f(gx)| < \varepsilon$$

é dita τ*-uniforme*, ou melhor *uniformemente contínua a direita*.
Se $X = G$ munido da ação a esquerda, $\iff$ f é uniformemente contínua a direita.
Uma $f\colon X \to \mathbb{R}$ prolonge-se sobre $\beta_G X$ se e somente se f é τ-uniforme.

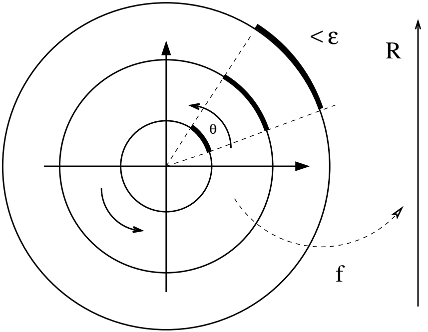
Relembramos: *cada* função contínua e limitada prolonge-se sobre βX.

Para mostrar que $\beta_{\mathbb{T}}\mathbb{R}^2$ é menor que $\beta\mathbb{R}^2$, basta monstrar uma função contínua limitada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que não é τ-uniforme.

Caso $\mathbb{T} \circlearrowright \mathbb{R}^2$

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \theta > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \phi,\ \ |\phi| < \theta \Rightarrow |f(x) - f(\phi x)| < \varepsilon.$$



Por exemplo, $f(x) = \cos x_1$ não é RUCB. $\therefore\ \beta_{\mathbb{T}}\mathbb{R}^2 \neq \beta\mathbb{R}^2$.

Caso de grupos localmente compactos

R. Palais - grupos de Lie (1960); Jan de Vries - caso geral (1977)

Pergunta: Existe sempre um compactificado equivariante tal que $i \colon X \hookrightarrow K$ é um homeomorfismo entre X e sua imagem, $i(X)$?

teorema: Si G é localmente compacto, sim: X imerge-se, como um sub-espaço topológico e da maneira equivariante, em $\beta_G X$.

Por exemplo, todos os grupos compactos, todos os grupos de matrizes, ...

Basta construir muitas funções RUCB que separam os pontos e os conjuntos fechados – como no axioma $T_{3\frac{1}{2}}$.

Caso de grupos localmente compactos

Ideia da prova, caso G compacto.
$L^2(G,\nu;\ell^2) = L^2(G,\nu)\otimes \ell^2$, um G-modulo unitário.
$X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{S}^\infty$, a esfera de ℓ^2, topologicamente.
$X \to L^2(G,\nu;\ell^2)$:

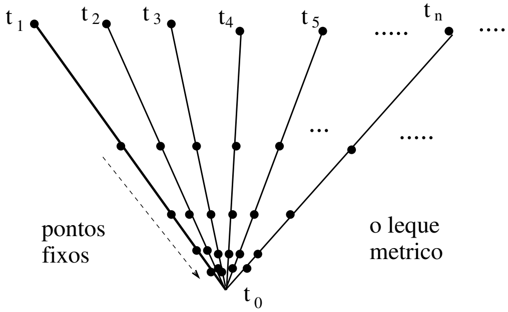
$$X \ni x \mapsto [g \mapsto j(gx)]$$

é uma imerção topológica equivariante.
G age continuamente sobre o dual de $L^2(G,\nu;\ell^2)$, e os funcionais duais são RUCB sobre X.
G LC: mesmas ideias, um pouco mais complicado.

Caso geral

Exemplo do Michael Megrelishvili (1988)

Um grupo polonês G agindo sobre um espaço polonês X de maneira que $i\colon X \to \beta_G X$ não é um homeomorfismo sobre a imagem.

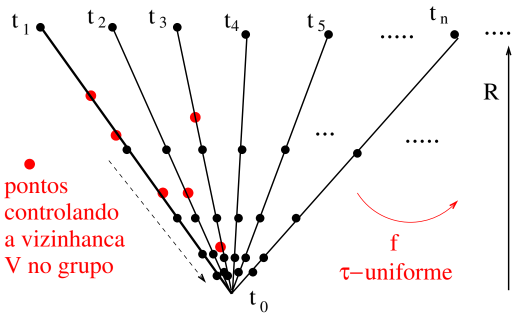


X é o leque métrico; $d(t_i, t_j) = 2$, $\forall i \neq j$;
G é o grupo de homeomorfismos consevando os pontos fixos, com a topologia de convergência simples (compacto-aberta)

Caso geral

Exemplo do Michael Megrelishvili (1988)

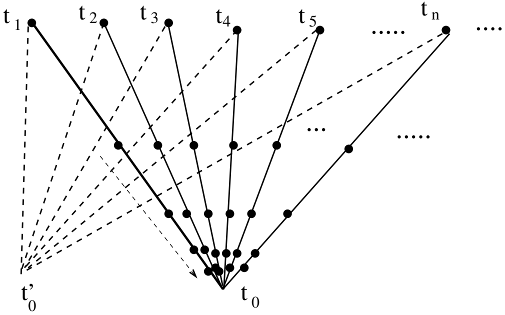
Um grupo polonês G agindo sobre um espaço polonês X de maneira que $i\colon X \to \beta_G X$ não é um homeomorfismo sobre a imagem.



Qual quer seja $\varepsilon > 0$, sobre todos segmentos exceito um número finito, f tem uma oscilação $< \varepsilon$.

$\therefore$ em $\beta_G X$, temos $i(t_n) \to i(t_0)$. (em X, não).

Um grupo polonês G agindo sobre um espaço polonês X de maneira que $i\colon X \to \beta_G X$ não é um homeomorfismo sobre a imagem.



Em $\beta_G X$, temos $i(t_n) \to i(t_0)$ e $i(t_n) \to i(t_0')$,

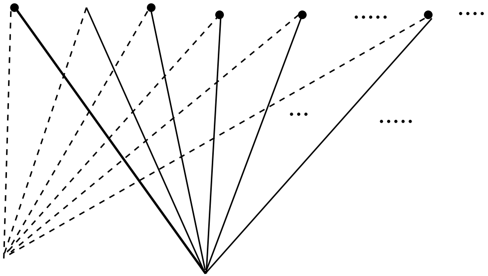
$\therefore i(t_0) = i(t_0')$, i não é injetiva!

Caso geral

Meu exemplo (Dez. 2015)

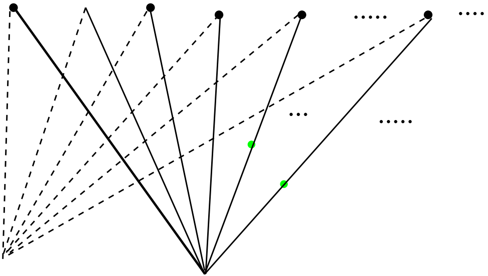
Pergunta (Yu. Smirnov, meados de 1980): Existe um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{ast\}$?

Sim. A construção recursiva.



Pergunta (Yu. Smirnov, meados de 1980): Existe um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{*\}$?

Sim. A construção recursiva.

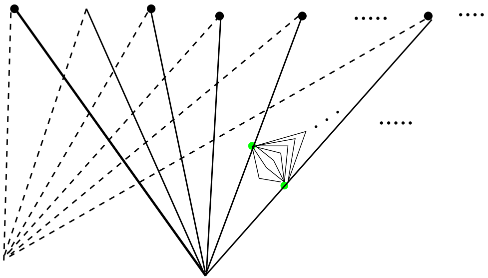


Caso geral

Meu exemplo (2016, arXiv:1601.03084)

Pergunta (Yu. Smirnov, meados de 1980): Existe um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{ast\}$?

Sim. A construção recursiva.



Podemos obter um espaço $X \cong \mathbb{Q}$, e um grupo agindo polonês, G. Não tem compactificados equivariantes não triviais.

Perguntas em aberto

• Existe um exemplo "natural" de um grupo topológico G agindo sobre um espaço X da maneira que $\beta_G X = \{*\}$?

• $\mathbb{R}$-arvores de Gromov.....?

• Pode ser um grupo de homeomorfismos de ℓ^2?

• Furstenberg e Scarr: existe uma ação transitiva com $\beta_G X = \{*\}$? (não pode ser polonesa)

• O resultado lindo de L. Stoyanov: $\beta_{U(\ell^2)_s}\mathbb{S}^\infty = \mathbb{B}^\infty$.
Os espaços $L^p(0,1)$, $p \neq 2$?

• $\mathbb{B}^\infty$ é o compactificado de Gromov da esfera: definido pelas funções da distância. Seja E um espaço de Banach com $\mathrm{Iso}(E)$ quase-transitiva, eg Gurarij. Então, $\beta_{\mathrm{Iso}(E)}\mathbb{S}_E$ é o compactifidado de Gromov da esfera?

• De mesmo, para a esfera de Urysohn?