O ROTACIONAL

Ricardo Bianconi

Primeiro Semestre de 2008

O rotacional de um campo vetorial é uma transformação linear que leva um campo vetorial em outro, e que tem aplicações em Mecânica dos Fluidos e em Eletromagnetismo, além de outras áreas.

Vamos defini-lo por meio de integrais de linha.

Lembramos que num plano, com base ortonormal positiva $(\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v)$ (eixos u e v) passando por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, e , se $\gamma_r(t) = p_0 + r\ \cos t\, \mathbb{X}_u + r \operatorname{sen} t\, \mathbb{X}_v$, e se $D_r = \{(x, y, z) = p_0 + u\, \mathbb{X}_u + v\, \mathbb{X}_v : u^2 + v^2 \leq r^2\}$, então o Teorema de Green estipula que

$$\oint_{\gamma_r} \mathbf{G} \cdot \mathbf{dr} = \iint_{D_r} \left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} \right) du\, dv$$

sendo que $\mathbf{G}(u, v) = \mathbf{G}(p_0 + u\, \mathbb{X}_u + v\, \mathbb{X}_v) = G_1 \mathbb{X}_u + G_2 \mathbb{X}_v$.

Agora seja $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$ um campo vetorial de classe C^1, e π um plano com equação vetorial $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + u\, \mathbb{X}_u + v\, \mathbb{X}_v$, onde suporemos que $(\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v)$ forma uma base ortonormal e que tenham coordenadas $\mathbb{X}_u = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbb{X}_v = (v_1, v_2, v_3)$ (na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Suponhamos que o campo $\mathbf{F}$ esteja definido em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0, z_0).

Seja $\mathbf{G}(u, v) = G_1(u, v)\, \mathbb{X}_u + G_2(u, v)\, \mathbb{X}_v$, onde

$$G_1(u, v) = \mathbf{F}(x_0 + u\, u_1 + v\, v_1, y_0 + u\, u_2 + v\, v_2, z_0 + u\, u_3 + v\, v_3) \cdot \mathbb{X}_u$$

$$G_2(u, v) = \mathbf{F}(x_0 + u\, u_1 + v\, v_1, y_0 + u\, u_2 + v\, v_2, z_0 + u\, u_3 + v\, v_3) \cdot \mathbb{X}_v$$

Usando a regra da cadeia e omitindo as variáveis, temos

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} = u_1 v_1 \frac{\partial P}{\partial x} + u_2 v_1 \frac{\partial P}{\partial y} + u_3 v_1 \frac{\partial P}{\partial z} +$$

$$+ u_1 v_2 \frac{\partial Q}{\partial x} + u_2 v_2 \frac{\partial Q}{\partial y} + u_3 v_2 \frac{\partial Q}{\partial z} +$$

$$+ u_1 v_3 \frac{\partial R}{\partial x} + u_2 v_3 \frac{\partial R}{\partial y} + u_3 v_3 \frac{\partial R}{\partial z}$$

e também

$$\frac{\partial G_1}{\partial v} = u_1 v_1 \frac{\partial P}{\partial x} + u_1 v_2 \frac{\partial P}{\partial y} + u_1 v_3 \frac{\partial P}{\partial z} +$$

$$+ u_2 v_1 \frac{\partial Q}{\partial x} + u_2 v_2 \frac{\partial Q}{\partial y} + u_2 v_3 \frac{\partial Q}{\partial z} +$$

$$+ u_3 v_1 \frac{\partial R}{\partial x} + u_3 v_2 \frac{\partial R}{\partial y} + u_3 v_3 \frac{\partial R}{\partial z}$$

e assim,

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} \right) = \overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{N}$$

sendo que

$$\overrightarrow{M} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

e

$$\overrightarrow{N} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) = \mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v.$$

O campo vetorial $\overrightarrow{M}$ é chamado de **rotacional** do campo $\mathbf{F}$, e denotado por $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ ou por $\nabla\mathbf{F}$.

Essa transformação tem esse nome porque de certa forma mede o quanto o campo $\mathbf{F}$ roda em torno de cada ponto. Provaremos uma fórmula que torna essa interpretação mais explícita. De modo a que se torne mais intuitivo, suporemos que $\mathbf{F}$ seja um campo de velocidades de um fluido movendo-se em uma região de $\mathbb{R}^3$.

Seja $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto do domínio do campo $\mathbf{F}$ e sejam π um plano contendo p_0, com equação vetorial $(x, y, z) = p_0 + u\,\mathbb{X}_u + v\,\mathbb{X}_v$, com base ortonormal positiva $(\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v)$ (eixos u e v), $\gamma_r(t) = p_o + r\,\cos t\,\mathbb{X}_u + r\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbb{X}_v$, e se $D_r = \{(x, y, z) = p_0 + u\,\mathbb{X}_u + v\,\mathbb{X}_v : u^2 + v^2 \leq r^2\}$, e $\mathbf{G}(u, v) = G_1(u, v)\,\mathbb{X}_u + G_2(u, v)\,\mathbb{X}_v$, em que $G_1(u, v) = [\mathbf{F}(p_0 + u\,\mathbb{X}_u + v\,\mathbb{X}_v) \cdot \mathbb{X}_u]$ e

$G_2(u,v) = [\mathbf{F}(p_0 + u\,\mathbb{X}_u + v\,\mathbb{X}_v) \cdot \mathbb{X}_v]$. Suporemos que o campo $\mathbf{F}$ seja de classe C^1.

A média da velocidade $\mathbf{F}$ sobre a curva γ_r é

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{\gamma_r} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \frac{1}{2\pi r}\oint_{\gamma_r} \mathbf{G}\cdot\mathbf{dr},$$

pois a curva γ_r (ou melhor, seu traço) está no plano π. Dividindo a expressão pelo raio da circunferência, obtemos a velocidade angular média sobre a curva:

$$\omega(r) = \frac{1}{r}\frac{1}{2\pi r}\oint_{\gamma_r} \mathbf{G}\cdot\mathbf{dr} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi r^2}\oint_{\gamma_r} \mathbf{G}\cdot\mathbf{dr}\right).$$

Agora aplicamos o Teorema de Green, como exposto acima, obtendo

$$\omega(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A(D_r)}\iint_{D_r}\left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v}\right) dudv\right],$$

sendo que $A(D_r) = 1/\pi r^2$ é a área de D_r.

Como estamos considerando a hipótese de que o campo $\mathbf{F}$ e, por conseguinte, o campo $\mathbf{G}$ são de classe C^1, as derivadas parciais de G_1 e G_2 são contínuas, o que implica que existe o limite desta última expressão, com r tendendo a zero:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{A(D_r)}\iint_{D_r}\left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v}\right) dudv\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v}\right)(0,0).$$

A expressão ao lado direito da igualdade acima nada mais é do que

$$\frac{1}{2}\left(\nabla \times \mathbf{F}(x_0,y_0,z_0)\right)\cdot\left(\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\right),$$

ou seja, metade da projeção do rotacional na direção da normal unitária do plano π.

Assim, podemos interpretar o rotacional do campo de velocidades $\mathbf{F}$ como o dobro da velocidade angular local em torno de cada ponto (o que em Mecânica dos Fluidos é chamada de **vorticidade**).

Para finalizarmos este texto, consideremos um campo de velocidades **irrotacional**, ou seja, cujo rotacional seja zero. Imaginemos uma pequena rolha redonda flutuando nesse fluido, com um par de eixos ortogonais desenhados em cima dela. O fluido exerce forças sobre a borda da rolha, que podemos supor proporcional à velocidade. Como a velocidade angular local desse fluido é zero em torno de cada ponto, o torque total exercido pelo fluido sobre a rolha é zero. Assim, veremos os eixos sobre a rolha sempre apontando para as mesmas direções.

Assim, se considerarmos o campo de velocidades em regime estacionário (não variando com o tempo), de um fluido viscoso submetido ao efeito de um eixo vertical cilíndrico de raio $a > 0$ rodando em sentido anti-horário, cuja expressão é proporcional a

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j},$$

vemos que globalmente, cada partícula percorre uma circunferência centrada no eixo z, mas, como o rotacional deste campo é zero, uma rolha bem pequena colocada no fluido com eixos desenhados em cima sempre os manterá apontando para a mesma direção. Ou seja, o rotacional é uma medida local e não global de rotação de um campo.