POTENCIAIS VETORIAIS

Ricardo Bianconi

Primeiro Semestre de 2008

Resumo

Como no caso de campos conservativos, em que dado o campo vetorial $\mathbf{F}$, tal que $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, então, sob certas condiões, existe um potencial f, tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, também vale que se $\mathsf{div}\,\mathbf{F} = 0$, então existe um campo vetorial $\mathbf{A}$, chamado de potencial vetorial deo campo $\mathbf{F}$, tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$. Vamos explorar um pouco essa idéia.

1 Introdução

No texto em que tratamos de campos conservativos, vimos que se um campo vetorial $\mathbf{F}$ tem seu rotacional nulo, então ele era o gradiente de uma função, chamade de potencial do campo. É claro que nem sempre isso vale, pois temos o campo *elemento de ângulo* $-y\mathbf{i}/(x^2+y^2) + x/(x^2+y^2)$, que não é conservativo, mas seu rotacional é nulo. Mas, se restringirmos o domínio do campo a um domínio simplesmente conexo (ou seja, sem furos que possam ser rodeados por curvas dentro do domínio), então qualquer campo cujo rotacional seja nulo será o gradiente de uma função.

Como $\mathsf{div}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = 0$, para qualquer campo $\mathbf{F}$ de classe C^1, então podemos nos perguntar se a condição $\mathsf{div}\,\mathbf{G} = 0$ implicaria a existência de um campo $\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{G} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$. Pelo Teorema de Stokes, o campo $\mathbf{G}$ tem que satisfazer

$$\iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$$

para toda superfície fechada S.

Tal campo $\mathbf{A}$, se existir, chama-se *potencial vetorial* do campo $\mathbf{G}$. Observe-se que se $\mathbf{rot}\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{A}+\mathbf{X}$ também será um potencial vetorial do campo $\mathbf{G}$.

Estes potenciais vetoriais são ferramentes úteis para facilitar alguns cálculos em Eletromagnetismo, em Mecãnica dos Fluidos, em Elasticidade, etc. E em Mecânica Quântica, esses potenciais têm significado físico (leia, por exemplo, sobre o *efeito de Ahranov-Bohm* no livro *Feynman Lectures in Physics*, volume II.

2 Cálculo de Potenciais Vetoriais

Vamos descrever um método para obter o potencial vetorial de um campo $\mathbf{F}$ cujo divergente é nulo. Mas antes, vejamos que há obstruões para esse esforço.

2.1 O Campo *Elemento de Ângulo Sólido*

Define-se medida de ângulo em radianos como sendo o comprimento de um arco de circunferência dividido pelo raio dela. De modo análogo, define-se *medida de ângulo sólido* como sendo a área de uma região de uma esfera dividida pelo raio ao quadrado.

Existe um campo vetorial chamado de *elemento de ângulo sólido* tal que, se integrado sobre qualquer superfície, mede o ângulo sólido varrido por ela, vista da origem, que é

$$\Omega = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Este campo satifaz $\mathsf{div}\,\Omega = 0$, mas $\iint_s \Omega \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 4\pi$, para qualquer superfície fechada S envolvendo a origem. Assim, não existe um potencial vetorial $\mathbf{A}$ definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, tal que $\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \Omega$.

2.2 Domínios Duplamente Conexos

O que teríamos que evitar para calcular o potencial vetorial é a possibilidade de o domínio de definição D do campo $\mathbf{F}$ ter buracos que possam ser envolvidos por uma superfície fechada contida em D.

Se D é tal que toda superfície fechada em D envolva apenas pontos de D, então D é *duplamente conexo*. Por exemplo, $D = \mathbb{R}^3$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \leq 0\}$ são domínios duplamentes conexos.

Para estes domínios, pode-se provar que se $\mathsf{div}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, então existe um potencial vetorial $\mathbf{A}$ para o campo $\mathbf{F}$. Na verdade, pode-se provar mais: se para toda superfície fechada S em D (não mais necessariamente duplamente conexo), $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$, então existe um potencial vetorial para $\mathbf{F}$ em todo D.

Vamos mostrar aqui um resultado menos complicado, mas que permite fazer contas.

2.3 Potenciais Vetoriais em Domínios Estrelados

Um *domínio estrelado* é um conjunto D, tal que existe um ponto $p_0 \in D$ que pode ser ligado a qualquer outro ponto de D por meio de um segmento de reta. Observe-se que $D = \mathbb{R}^3$, ou $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \leq 0\}$ são estrelados (no último caso, tome $p_0 = (0,0,z_0)$, com $z_0 > 0$), mas $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ não é (pois não existe nenhum segmento de reta dentro de D ligando um ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao ponto $p = (-x_0, -y_0, z_0)$).

Supomos então que D seja estrelado, com um ponto $p_0 \in D$ escolhido, que possa ser ligado a qualquer outro ponto de D por segmento de reta, e seja $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ de classe C^1, tal que $\mathsf{div}\,\mathbf{F} = 0$. Sejam

$$A_1(x,y,z) = \int_0^1 ((w-z_0)Q(u,v,w) - (v-y_0)R(u,v,w))\,dt,$$

$$A_2(x,y,z) = \int_0^1 ((u-x_0)R(u,v,w) - (w-z_0)P(u,v,w))\,dt,$$

$$A_3(x,y,z) = \int_0^1 ((v-y_0)P(u,v,w) - (u-x_0)Q(u,v,w))\,dt,$$

com $(u,v,w) = (x_0,y_0,z_0) + t(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Observe que os integrandos são as três componentes do produto vetorial $\mathbf{F} \times (u-x_0, v-y_0, w-z_0)$.

Vamos verificar que $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ é um potencial vetorial de $\mathbf{F}$, ou seja, que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$. Como as contas são parecidas, vamos verificar apenas que $P = \partial A_3/\partial y - \partial A_2/\partial z$. Usando derivação dentro do sinal de integral,

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^1 ((v-y_0)P - (u-x_0)Q)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}((v-y_0)P - (u-x_0)Q)\,dt.$$

O integrando é

$$\frac{\partial}{\partial y}((v-y_0)P-(u-x_0)Q)=tP+t(v-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}-t(u-x_0)\frac{\partial Q}{\partial y},$$

lembrando que, pela regra da cadeia, $\partial P(u,v,w)/\partial y = \partial P/\partial v \cdot \partial v/\partial y = t\partial P/\partial y$, etc.

Temos também que

$$\frac{\partial A_2}{\partial z}=\int_0^1\left[t(u-x_0)\frac{\partial R}{\partial z}-tP-t(w-z_0)\frac{\partial P}{\partial z}\right]dt.$$

Desta forma, temos que

$$\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}=\int_0^1[2tP+$$

$$+t(v-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}+t(w-z_0)\frac{\partial P}{\partial z}-t(u-x_0)\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg]\,dt$$

Lembrando que, por hipótese,

$$\mathsf{div}\,\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

e que $u=x_0+t(x-x_0)$, $v=y_0+t(y-y_0)$ e $w=z_0+t(z-z_0)$, temos

$$\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}=\int_0^1[2tP+$$

$$+t^2(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}+t^2(y-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}+t^2(z-z_0)\frac{\partial P}{\partial z}\Bigg]\,dt.$$

Por fim, se $g(t)=t^2P(u,v,w)=t^2P(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0),z_0+t(z-z_0))$, vemos que

$$g'(t)=2tP(u,v,w)+t^2(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}+t^2(y-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}+t^2(z-z_0)\frac{\partial P}{\partial z},$$

ou seja,

$$\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}=\int_0^1 g'(t)\,dt=g(1)-g(0)=P(x,y,z).$$

Para as outras coordenadas, a conta é similar.

2.4 Exemplos

Vamos calcular alguns exemplos.

Exemplo 1 **Campos homogêneos de grau** α. Suponha que $\mathbf{F}(tx,ty,tz) = t^\alpha \mathbf{F}(x,y,z)$, para todo $t > 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq -2$. Seja $\mathbf{A}(x,y,z) = 1/(\alpha+2)\mathbf{F} \times \mathbf{r} = 1/(\alpha+2)(P,Q,R) \times (x,y,z)$. Então $\mathbf{A}$ é um potencial vetorial de $\mathbf{F}$. Para verificar essa afirmação, observe-se que se $f(tu) = t^\alpha f(u)$, então $uf'(u) = \alpha f(u)$. Use isto ao calcular o rotacional do campo $\mathbf{A}$.

Exemplo 2 Observe que em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$, vale

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} = \mathbf{rot}\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{yz}{x^2+y^2}\mathbf{j}\right),$$

porque o campo do lado esquerdo da igualdade é homogêneo de grau -1.

Exemplo 3 Se tentarmos aplicar o método dos campos homogêneos ao campo $\Omega = \mathbf{r}/r^3$, não se consegue obter seu potencial vetorial (ainda bem!), pois Ω não admite potencial vetorial e $\Omega \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Mais ainda, ele é homogêneo de grau -2.

Mas podemos aplicar o método da integral em domínios estrelados. Se escolhermos o ponto $p_0 = (0,0,1)$, obteremos pelo método

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(-y,x,0) & \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ (0,0,0) & \text{se} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Essa expressão vale no domínio $D_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \leq 0\}$, que é estrelado, e $\Omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$. Apesar de ser definido por casos, o campo $\mathbf{A}$ é de classe C^1.

Agora, se escolhermos $p_0 = (0,0,-1)$, obteremos

$$\tilde{\mathbf{A}}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}\left(-1 - \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(-y,x,0) & \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ (0,0,0) & \text{se} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Essa expressão vale no domínio $D_{-1} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \geq 0\}$, que é estrelado, e $\Omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$. Aqui também, apesar de ser definido por casos, o campo $\mathbf{A}$ é de classe C^1.

No domínio $D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$, a diferença

$$\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = \frac{2}{x^2+y^2}(-y,x,0)$$

é um campo irrotacional (é o dobro do elemento de ângulo). Nesse mesmo domínio,

$$\hat{\mathbf{A}} = -\frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(-y,x,0)$$

também é potencial vetorial de Ω.

Observe que nenhum dos campos $\mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{A}}$ pode ser estendido ao domínio máximo de Ω, que é $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

2.5 Exercícios

Obtenha um potencial vetorial dos campos abaixo. Se precisar, restrinja o domínio.

1. $\mathbf{F} = (-y, x, 3z)$
2. $\mathbf{F} = \dfrac{1}{4x^2+5y^2}(-5y, 4x, 0)$
3. $\mathbf{F} = (yz, x, xy^2)$
4. $\mathbf{F} = \dfrac{1}{(x+z)^2+(y-z)^2}(z-y, x+z, -x-y)$