A linguagem matemática

Ricardo Bianconi

1º Semestre de 2002

1 Introdução

O objetivo deste texto é tentar explicar a linguagem matemática e o raciocínio lógico por trás dos textos matemáticos. Isto não é uma tarefa fácil, pois depende de um refinamento do raciocínio lógico do dia a dia e do aprendizado de uma linguagem que não é a do dia a dia. Basta comparar um texto matemático com um mais literário que vemos como é estranha a linguagem. Não se deve desanimar com as dificuldades que vamos encontrar. O desenvolvimento do entendimento é gradual e depende da experiência de cada leitor ou leitora.

Em matemática, todas as palavras têm um sentido preciso. Por isso, faz-se necessário que conheçamos seus significados.

Vamos começar com a parte chamada de proposicional. Vamos esclarecer expressões como "se ... então...", "... e...", "... ou...", "... se, e somente se,...", "... sempre que ...," "condição necessária", "condição suficiente", "condição necessária e suficiente", "equivalente", "portanto" e assim por diante.

Na gramática portuguesa, estas são palavras ou expressões chamadas de conjunções, que são usadas para ligar duas frases ou orações para obter uma oração mais complexa.

Frases são as orações mais simples, da forma sujeito-verbo-predicado, que podem ser apresentadas diretamente (por exemplo "f é uma função contínua") ou de uma maneira imperativa (por exemplo "sf seja f uma função contínua"). Podemos ter também frases do tipo SUJEITO-VERBO (como em "existe uma função contínua", em que o sujeito é a expressão "uma função contínua" e o verbo é "existe").

O verbo "existir" também pode ser usado para criar orações compostas, como em "Existe uma função f, tal que f é contínua e não derivável em $x = 0$", em que o sujeito é a oração composta "uma função f, tal que f é contínua e não derivável em $x = 0$". Este verbo será tratado com mais detalhes na seção sobre quantificação.

Uma oração pode estar afirmando um fato correto (verdadeiro) ou errado (falso) em matemática. Nas frases como em "f é uma função contínua", a veracidade depende de qual função a letra f representa. Uma vez que saibamos se estas frases são verdadeiras ou falsas, podemos determinar a veracidade de orações compostas a partir de frases, usando as conjunções acima.

2 A linguagem "proposicional"

2.1 "E", "ou", "não"

Comecemos com a conjunção "e". Suponhamos que as letras A e B representem orações. A veracidade da oração "A e B" só ocorre quando cada oração A ou B é verdadeira. Por exemplo "$x > 0$ e $x^2 \leq 4$" só é verdadeira quando ambas as frases $x > 0$ e $x^2 \leq 4$ forem verdadeiras. (A veracidade desta duas frases depende do valor atribuído à variável x.)

A conjunção "ou" em matemática sempre tem a conotação de "ou não exclusivo", o que geralmente não ocorre na linguagem natural do dia a dia. Por exemplo, "$x < 0$ ou $x^2 \geq 4$" só é verdadeira quando pelo menos uma das frases $x < 0$ ou $x^2 \geq 4$ for verdadeira. Pode ocorrer que ambas sejam verdadeiras.

A conjunção "não" é simples; "não A" é verdadeira quando A for falsa e vice-versa.

Podemos representar a veracidade ou falsidade de proposições com as chamadas tabelas-verdade. Na primeira linha listamos as proposições básicas (denominadas por letras A, B, etc.) e as mais complexas (como, por exemplo, $A \wedge B$, que significa "A e B"). Nas linhas seguintes listamos V (para "verdadeira") e F (para "falsa"). Veja a tabela 1.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Tabela 1: Tabelas-verdade das conjunções "e" ($\wedge$), "ou" ($\vee$) e "não" ($\neg$).

Vamos ver alguns exemplos em que estas conjunções ocorrem.

> Sejam β, o plano da cônica; α, o plano contendo a circunferência da intersecção de uma das esferas com o cone; F, o foco correspondente a esta esfera e d a diretriz.

Neste caso, temos uma oração do tipo $A \wedge B \wedge C \wedge D$, sendo que A é "seja(m) β, o plano da cônica"que é o mesmo que dizer "β é o plano da cônica"; B é "α (é) o plano contendo a circunferência da intersecção de uma das esferas com o cone", C é "F (é) o foco correspondente a esta esfera" e D é "d a diretriz". Nestas frases o verbo "ser" foi omitido, mas está subentendido.

Vejamos outro exemplo.

> A equação final pode ser da forma $c^2t^2 - d^2w^2 = 0$, ou da forma $c^2t^2 + d^2w^2 = 0$, ou da forma $c^2t^2 + d^2w^2 + p^2 = 0$.

Aqui temos uma oração do tipo $A \vee B \vee C$, sendo que A é a frase "a equação final pode ser da forma $c^2t^2 - d^2w^2 = 0$", B é a frase "(a equação final pode ser da forma) $c^2t^2 + d^2w^2 = 0$" e C é a frase "(a equação final pode ser da forma) $c^2t^2 + d^2w^2 + p^2 = 0$".

Por fim, um exemplo com a negação.

...o plano intersecta só uma das faces e (a cônica) não é uma parábola.

Aqui temos uma oração da forma $A \wedge \neg B$, sendo A a frase "o plano intersecta só uma das faces" e B é "(a cônica) é uma parábola".

2.2 A implicação

Agora vamos tratar da IMPLICAÇÃO, que é a que mais causa problemas na vida do estudante e que é a base do raciocínio matemático.

Ela pode aparecer de várias formas, sendo a mais comum a forma "se A, então B", ou em símbolos, $A \Rightarrow B$. Neste caso, a oração A é chamada de "hipótese" e a oração B de "tese". O significado da implicação é "assumindo que a oração A é verdadeira, posso concluir a oração B". Para que a implicação seja verdadeira, quando a hipótese A é verdadeira, a conclusão (ou tese) B tem que ser verdadeira. Se partirmos de uma hipótese A verdadeira, mas concluirmos uma tese B falsa, a implicação $A \Rightarrow B$ é incorreta, ou falsa.

E se partimos de uma hipótese A falsa? Se a conclusão B for verdadeira, não é difícil de aceitar que a implicação $A \Rightarrow B$ é verdadeira.

Mas, e quando a conclusão B é falsa?

Para descobrirmos isto, vamos refrasear a implicação $A \Rightarrow B$ de outras maneiras equivalentes. Sabemos que se $A \Rightarrow B$ e se A for verdadeira, então B tem que ser verdadeira. Se B for falsa, então A terá que ser falsa, ou seja, temos a implicação $\neg B \Rightarrow \neg A$, que deverá ser verdadeira. Ou seja, $A \Rightarrow B$ e $\neg B \Rightarrow \neg A$ devem dizer a mesma coisa. Em termos de tabelas-verdade, veja a tabela 2.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Tabela 2: Tabela-verdade da implicação.

Nesta tabela, obtemos os valores V para $A \Rightarrow B$ na última linha usando que $\neg B \Rightarrow \neg A$ é verdadeira neste caso.

Observe que se a hipótese A for falsa, então podemos concluir qualquer coisa: tanto B como $\neg B$.

A seguir listamos várias maneiras como a implicação $A \Rightarrow B$ pode ser escrita em livros de matemática.

1. se A, então B;
2. $A \Rightarrow B$;
3. A implica B;
4. $\neg B \Rightarrow \neg A$;
5. $\neg A \vee B$ (faça a tabela-verdade);
6. B, sempre que A (sempre que A ocorre, então B também deve ocorrer);
7. B, se A;
8. $B \Leftarrow A$;
9. A, somente se B (se B não ocorre, então A não pode ocorrer);
10. A e, portanto, B;
11. A é condição suficiente para B (supondo a implicação verdadeira, basta que A seja verdadeira para que possamos concluir que B é verdadeira);
12. B é condição necessária para A (supondo a implicação verdadeira, se B for verdadeira, A tem que necessariamente ser verdadeira).

Vamos ver alguns exemplos.

Se F_1 e F_2 são os focos da elipse $\mathcal{E}$, então, variando o ponto P em $\mathcal{E}$, PF_1+PF_2 é constante.

Neste caso temos uma implicação $A \Rightarrow B$, sendo que A é a afirmação "F_1 e F_2 são os focos da elipse $\mathcal{E}$" e B é a afirmação "variando o ponto P em $\mathcal{E}$, $PF_1 + PF_2$ é constante".

Vamos ver mais um exemplo.

...isto implica que é uma tangente à parábola.

Neste caso temos uma implicação $A \Rightarrow B$, sendo que A é "isto" (referindo-se a uma afirmação anterior) e B é "é uma tangente à parábola" (em que o sujeito está oculto e refere-se a um objeto mencionado anteriormente).

2.3 Equivalência

Duas proposições A e B são equivalentes se ambas são verdadeiras ou ambas são falsas. Denotamos "A é equivalente a B" por $A \Leftrightarrow B$. Usamos esta flecha dupla porque $A \Leftrightarrow B$ é a mesma coisa que $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Em português, isto é escrito da forma "A se, e somente se, B", o que pode ser escrito como "A, se B e A somente se B", ou "A é condição necessária e suficiente para B".

Em termos de tabela-verdade, veja a tabela 3.

Um exemplo.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 3: Tabela-verdade da implicação.

$e = 1$ se, e somente se, a cônica é uma parábola.

Aqui temos $A \Leftrightarrow B$, sendo A a frase $e = 1$ (ou seja, "e é igual a 1") e B é "a cônica é uma parábola".

Este exemplo poderia ser reescrito da forma:

Uma condição necessária e suficiente para que a cônica seja uma parábola é que $e = 1$.

3 Quantificação

Vamos tratar agora da quantificação. Aqui vamos estudar o papel do verbo "existir" e da expressão "para todo". Estas expressões permitem construir afirmações sobre a quantidade de elementos que satisfazem uma certa propriedade (por isso chamamos de "quantificação").

3.1 Existe

O uso do verbo "existir" é sempre da forma "existe (pelo menos um) X, tal que $A(X)$", sendo que $A(x)$ é uma propriedade de X. Por exemplo, "existe x, tal que $x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 2$", que é da forma "existe x, tal que $A(x)$", sendo $A(x)$ a propriedade "$x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 2$".

Às vezes "existe x, tal que $A(x)$" é escrito como $\exists x\, A(x)$.

A veracidade ou falsidade da afirmação "$x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 2$" depende de que elemento está sendo representado pela letra x. No entanto a afirmação "existe x, tal que $x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 2$)" que é verdadeira, pois podemos citar pelo menos um exemplo, $x = \sqrt{2}$, tal que $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 2$.

3.2 Para todo

Outro tipo de afirmação de quantidade é da forma "para todo, x (vale) $A(x)$", o que às vezes é denotado como $\forall x\, A(x)$, como, por exemplo, "para todo x, vale $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$", ou $\forall x\, (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$.

Uma afirmação da forma "para todo X, (vale) $A(X)$" será verdadeira se a propriedade $A(X)$ for verdadeira, não importa o que X representa. No exemplo "para todo x, vale $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$", a propriedade $A(x)$ é "$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$", que é sempre verdadeira (pois se $x \notin \mathbb{R}$, a implicação

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$ é verdadeira) e, portanto, a afirmação "para todo x, vale $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$" é verdadeira.

Esta expressão também admite outro modo de se escrever muito comum em textos de matemática, a saber, "dado x, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$". Para entendermos melhor esta forma, vamos considerar $A(x)$ como sendo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 > 0$. Sabemos que se $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$, então $x^2 > 0$. Para tais x, a afirmação $x^2 > 0$ é verdadeira. Por outro lado, se $x = 0$ então $x^2 > 0$ é falsa. Daí, "para todo x, $A(x)$" será falsa; a mesma coisa pode ser dito de "dado x, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$", pois pode ser que foi dado $x = 0$.

Às vezes, a expressão "para todo x" aparece depois de $A(x)$, como em "$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$, para todo x".

Uma outra variação na escrita de "para todo x, $A(x)$", em que $A(x)$ é da forma $B(x) \Rightarrow C(x)$, é "para todo x, (tal que) $B(x)$, (vale) $C(x)$". Por exemplo, "para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$", ou $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 0)$.

Um cuidado que devemos ter ao ler um texto matemático é que, às vezes, a quantificação "para todo" é omitida, mas é subentendida. Por exemplo, considere a frase:

> Se f for uma função derivável então f será contínua.

Agora pergunto: a qual f este enunciado se refere?

Na verdade, a nenhuma função em particular, mas se refere a qualquer função f. Este símbolo, f, representa um elemento genérico ou arbitrário, sem especificação que o particularize. O enunciado acima descreve uma propriedade que vale para cada função f. Podemos, então, reescrevê-lo assim:

> Para toda f, se f for uma função derivável então f será contínua.

3.3 Outras quantificações

Os dois tipos de quantificação ("existe", e "para todo"), em geral, são suficientes para exprimir outros tipos de quantificações.

Por exemplo, "existe um único x, tal que $A(x)$" (escrito em algumas referências como $\exists! x\, A(x)$) diz que existe exatamente um elemento x satisfazendo a propriedade $A(x)$. Para expressarmos isto com "existe" (pelo menos um) e "para todo", dividimos a frase acima em duas partes: uma dizendo que existe pelo menos um x, tal que $A(x)$, e outra dizendo que não pode ocorrer mais de um x, tal que $A(x)$. Assim, temos "existe x, tal que $A(x)$ e, para todo y, se vale $A(y)$, então $y = x$". Em símbolos, $\exists x\, (A(x) \wedge \forall y (A(y) \Rightarrow y = x))$.

Outro exemplo: "existem pelo menos três elementos x, tais que $A(x)$", devemos dizer que existem pelo menos três elementos distintos x_1, x_2 e x_3 que satisfazem a propriedade $A(x)$, ou seja, "existem x_1, x_2, x_3, tais que $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ e $x_2 \neq x_3$" (os três são distintos) "e $A(x_1)$, $A(x_2)$ e $A(x_3)$" (os três satisfazem a propriedade).

Agora, para dizer que "existem exatamente três elementos x, tais que $A(x)$", significa dizer que "existem pelo menos três elementos x, tais que $A(x)$, e para todo elemento y, tal que $A(y)$, y deve ser um dos x_i". Ou seja, em símbolos: $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3) \wedge \forall y (A(y) \Rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3))]$.

4 Teoremas e demonstrações

Essencialmente, todos os resultados em matemática (ou seja, afirmações que podem ser chamados de teoremas, ou de proposições, ou de lemas, dependendo do gosto de quem escreve) são da forma hipótese(s) implica(m) tese. Dito de outra maneira, os resultados são da forma: *partindo de alguns pressupostos* (hipóteses) *posso concluir a* tese.

Quais são estes pressupostos? Eles podem estar explicitamente escritos no *enunciado* do resultado ou subentendidos. Por exemplo, não vamos escrever toda a hora os axiomas da teoria que estamos estudando. Eles são automaticamente assumidos como hipóteses. Resultados provados anteriormente também podem ser assumidos como hipóteses. (A menos que haja menção explícita de que não devam ser usados!)

O processo de demonstrar um resultado basicamente é partir dessas hipóteses e, mediante raciocínios elementares, ir obtendo conclusões intermediárias, até chegar à conclusão desejada. Uma demonstração é uma lista de evidências de que a afirmação do teorema é verdadeira.

Mas quais são esses raciocínios elementares? Como devem ser apresentadas as evidências da veracidade de um enunciado?

Vamos tentar descrevê-los a partir de alguns exemplos, e depois faremos um sumário com todos eles.

(1) A primeira técnica é passar do geral para o particular:

Todos os homens são mortais.
Sócrates é um homem.
Portanto Sócrates é mortal.

Todos já devem ter ouvido estas três frases. A primeira é uma afirmação geral sobre os homens, dando uma propriedade que vale para todos os homens, de serem mortais. A segunda dá um exemplo particular de homem, Sócrates. E a terceira conclui que este exemplo particular também tem a propriedade de ser mortal.

Vejamos um exemplo mais matemático.

Todas as circunferências são elipses.
$x^2 + y^2 = 1$ é uma circunferência.
Portanto $x^2 + y^2 = 1$ é uma elipse.

Vamos analisar alguns exemplos do Cálculo Diferencial.

Toda função derivável é contínua.
O seno é função derivável.
Portanto o seno é função contínua.

(2) A segunda seria o oposto, generalizando uma propriedade.

Aqui temos que ter mais cuidado. Não basta termos verificado uma afirmação para um caso particular para concluir o geral.

Por exemplo, se obtivermos uma propriedade que valha para a funcão seno, não podemos deduzir que valerá para todas as funções. (Um exemplo mais específico: sabemos que a função seno tem a propriedade $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x)$; deste caso particular seria errado concluir que toda função f tem a propriedade $f(x+2\pi) = f(x)$. Poderemos apenas concluir que existe f tal que $f(x+2\pi) = f(x)$.)

Mas se chegarmos a uma conclusão usando um símbolo para um elemento *arbitrário*, que não seja específico, então poderemos concluir que valerá para todos os elementos no contexto em questão.

Por exemplo, para provar que toda função derivável é contínua, consideramos uma função arbitrária f, e faremos as contas que permitem concluir que f será contínua. Daí vem a famosa frase: "como f é arbitrária, isto vale para toda f." Não foi especificado qual era tal f, mas foi usado este símbolo para denotar cada f derivável.

(3) A terceira permite concluir a tese a partir de uma implicação e a verificação de sua hipótese.

Se valer uma implicação "Hipótese implica Tese" e se valer a "Hipótese" então concluímos que vale a "Tese." Vejamos um exemplo:

Havíamos concluido anteriormente que: se o seno for derivável então o seno será contínuo.
Havíamos também concluido que: o seno é derivável.
Portanto, concluímos que: o seno é contínuo.

(4) Equivalências lógicas. Aqui, basicamente, substituimos uma frase por outra equivalente. Por exemplo:

A frase: "se f é derivável então f é contínua"
é equivalente a "ou f é contínua ou f não é derivável."

5 Analisando demonstrações

Vamos, agora, juntar tudo o que vimos anteriormente para analisar e entender uma demonstração. Primeiro, devemos encarar uma demonstração como um conjunto organizado de evidências de que o enunciado do *teorema* em questão está correto. Nos livros omitem-se muitos passos considerados óbvios pelo autor (ou, pelo menos, fáceis de serem descobertos). Cada passo da demonstração deve ser uma das seguintes:

1. Citar uma hipótese.

2. Citar um axioma ou teorema anterior.

3. Citar uma definição.

4. Usar uma das quatro técnicas descritas acima para as conclusões intermediárias.

Uma demonstração pode ser de dois tipos: direta ou por contradição.

Uma demonstração direta parte das hipóteses do teorema (se estiverem explícitas) e axiomas e resultados anteriores, vai usando aqueles tipos de argumentações intermediárias, até chegarmos à conclusão final, que é a tese do teorema.

Uma demonstração por contradição pode ser de dois tipos: prova-se que a negação da tese implica a negação da(s) hipótese(s), ou prova-se que a negação do teorema implica uma contradição (por exemplo, da forma A e não A; neste caso costuma-se chamar este tipo de demonstração de redução ao absurdo). Nesta última, usamos a verdade lógica: se $\boxed{\text{não A}}$ implica algo sempre falso, então A é verdadeira.

Bom, nada melhor do que exemplos comentados para esclarecer as idéias.

Para ficar de fácil referência, citemos os axiomas que descrevem as propriedades dos números reais:

(1) Axiomas para soma e produto. São axiomas dizendo como funcionam as duas operações de soma e produto: $x + y = y + x$; $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x + 0 = x$; para cada x existe y tal que $x + y = 0$, e tal y é denotado como $-x$; $xy = yx$; $x(yz) = (xy)z$; $1x = x$; para cada $x \neq 0$ existe y tal que $xy = 1$, e tal y é denotado por x^{-1}; $x(y+z) = xy+xz$ (propriedade distributiva). Os leitores já devem estar acostumados a usar estas propriedades sem se dar conta de sua importância. (Poderíamos incluir aqui axiomas referentes a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Como não serão usados nos exemplos seguintes, serão omitidos.)

(2) Axiomas para a ordem. Estes axiomas dizem que a ordem dos números reais é compatível com a soma e produto: se $x < y$ então $x + z < y + z$; se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$; para todo x, exatamente uma das condições vale: ou $x < 0$, ou $x = 0$, ou $x > 0$; se $x < 0$ então $-x > 0$.

(3) Propriedade do supremo. Esta propriedade diz que o conjunto de números reais é, de certo modo, completo, sem "furos." Ela diz: se $A \subset \mathbb{R}$ for um conjunto não vazio e limitado superiormente (isto é, existe algum $M \in \mathbb{R}$ tal que M é maior do que todos os elementos de A), então A possui um supremo (isto é, existe o menor limitante superior de A, ou seja, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$, $x \leq s$ e se M for um limitante superior de A, então $s \leq M$).

Observemos que até a resolução de equações ou desigualdades é um processo dedutivo e usa os axiomas para a soma, o produto e a ordem como técnicas de solução.

Resolver a seguinte desigualdade:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x-6}.$$

Resolver esta desigualdade significa obtermos desigualdades equivalentes a esta, onde a variável x aparece isolada. Para isto, usaremos as propriedades da soma, do produto e da ordem.

(1) Uma primeira condição para que haja solução é que os denominadores não se anulem. Por isso concluímos que $x \neq 1$ e $x \neq 6$.

(2) Precisamos eliminar os denominadores, fazendo a "multiplicação cruzada," ou seja, multiplicar ambos os membros da desigualdade por $(x-1)(x-6)$. Mas, temos que tomar cuidado com o sinal deste fator, pois a propriedade da ordem que trata de multiplicação dos dois lados da desigualdade requer que o fator seja positivo. Por isso, devemos dividir em dois casos: $(x-1)(x-6) > 0$ e $(x-1)(x-6) < 0$.

(3) Se $(x-1)(x-6) > 0$, concluímos que ou $(x-1) > 0$ e $(x-6) > 0$ donde $x > 6$, ou $(x-1) < 0$ e $(x-6) < 0$, donde $x < 1$. Portanto, se $x > 6$ ou $x < 1$, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x-1)(x-6)$, concluímos que

$$(x+1)(x-6) < (x+2)(x-1).$$

(4) Ainda sob as hipóteses $x < 1$ ou $x > 6$, vamos resolver a desigualdade acima. Usando a propriedade distributiva, concluímos que

$$x^2 - 5x - 6 < x^2 + x - 2.$$

(5) Somando-se oas dois lados $-x^2 + 5x + 2$, concluímos que

$$-4 < 6x.$$

(6) Multiplicando-se ambos os membros por $1/6$, obtemos que $x > -2/3$. Como estamos sob as hipóteses $x < 1$ ou $x > 6$, podemos refinar a conclusão de que ou $-2/3 < x < 1$ ou $x > 6$. (Aqui argumento assim: como vale "A implica B," então também vale "A implica A e B.")

(7) Agora trataremos do caso em que $(x-1)(x-6) < 0$, ou seja, em que $(x-1) > 0$ e $(x-6) < 0$, donde $1 < x < 6$. Observe que a outra possibilidade, em que $(x-1) < 0$ e $(x-6) > 0$ não ocorre, pois, neste caso, x deveria ser ao mesmo tempo maior que 6 e menor que 1.

(8) Sob a hipótese de que $1 < x < 6$, $(x-1)(x-6) < 0$, donde $-(x-1)(x-6) > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $-(x-1)(x-6)$ obtemos:

$$-(x+1)(x-6) < -(x+2)(x-1).$$

(9) Pela propriedade distributiva, concluímos que:

$$-x^2 + 5x + 6 < -x^2 - x + 2.$$

(10) Somando aos dois membros $x^2 + x - 6$, obtemos:

$$6x < -4.$$

(11) Multiplicando por $1/6$, obtemos $x < -2/3$. Como estamos sob a hipótese de que $1 < x < 6$, e como $-2/3 < 1$, concluímos que não há soluções à desigualdade neste intervalo.

(12) Acabamos de provar que se x é um número real que satisfaz a desigualdade

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x-6}$$

então x deve satisfazer uma das desigualdades

$$-\frac{2}{3} < x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 6,$$

(que é a solução procurada). Na verdade, pode ser provado que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x-6} \quad \text{se, e somente se,} \quad -\frac{2}{3} < x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 6.$$

Obviamente, não é necessário escrever tudo isto para resolver uma desigualdade. Isto só foi feito aqui para explicitar o raciocínio dedutivo que é usado para resolver qualquer tipo de problema, tanto "numérico" quanto "teórico." Neste exemplo vemos porque são omitidos vários detalhes "triviais" de uma dedução. Com todos estes detalhes a leitura torna-se mais enfadonha e complicada.

Observe que podemos resolver esta desigualdade de outro modo mais direto. Passamos tudo ao primeiro membro da desigualdade e depois estudamos os sinal da expressão obtida. Vamos fazê-lo, usando símbolos:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x-6} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x-6} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-6)-(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-6)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x-4}{(x-1)(x-6)} < 0 \Leftrightarrow (-6x-4 < 0 \wedge (x-1)(x-6) > 0) \vee (-6x-4 > 0 \wedge (x-1)(x-6) < 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1 \vee x > 6.$$

Analisem esta dedução. Observe que escrevemos sempre $\Leftrightarrow$ entre cada frase. Neste caso, podemos fazê-lo porque cada uma destas frases é equivalente às outras.

Agora, um exemplo mais sofisticado. Vamos deduzir destes axiomas que todo número real positivo tem raiz quadrada. Observemos que não explicitamos nestes axiomas quase nehuma propriedade de números reais que estamos acostumados a usar!

Prova de que todo número real positivo tem raiz quadrada:

Bom, comecemos com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Vamos usar a propriedade do supremo, definindo o conjunto $A = \{x \geq 0 : x^2 < a\}$. Como $a > 0$ e $0^2 = 0 < a$, vemos que A não é vazio (pois exibimos um elemento dele). Vamos mostrar que A é limitado superiormente. Para isto, usaremos as propriedades da ordem.

Se $x > 1$ então $x > 0$ e por isso, $x^2 > x$ e se $x > 0$ e $x \leq 1$ então $x^2 \leq x$. Daí, se $a > 1$ e $x^2 < a$, então $x < a$ e se $a \leq 1$ e $x^2 < a$ então $x \leq 1$. Portanto, se $M = \max\{1, a\}$, então, para todo $x \in A$, $x \leq M$. Ou seja, A é limitado superiormente, donde concluímos que A tem supremo, que chamaremos de s.

Mostraremos que $s^2 = a$ (ou seja, s é uma raiz quadrada de a). Para isto, teremos que provar que nem $s^2 < a$ e nem $s^2 > a$, argumentando por contradição.

Se $s^2 > a$, tome $\varepsilon = (s^2 - a)/(3s)$. Então $0 < \varepsilon < (s^2 - a)/(2s)$; portanto, $(s-\varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon > a$ (lembrando que $\varepsilon^2 > 0$), donde $s - \varepsilon < s$ é limitante superior de A, contradizendo que s seja o supremo de A.

Se $s^2 < a$, tome $\varepsilon = \min\{1/2, (a - s^2)/(2s + 2)\}$. Então $0 < \varepsilon^2 < \varepsilon < (a - s^2)/(2s + 1)$; daí, $(s+\varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon = s^2 + (2s+1)\varepsilon < s^2 + (2s+1)(a - s^2)/(2s+1) = a$, ou seja, $s + \varepsilon \in A$, contradizendo que s seja o supremo de A.

Portanto, $s^2 = a$. Tal s é denotado por $\sqrt{a}$.

Análise da demonstração acima: Vamos detalhar as argumentações da demonstração. Este tipo de detalhamento pode ser feito pelos leitores em qualquer demonstração de qualquer texto.

(1) A demonstração usa a propriedade do supremo para mostrar que $x^2 = a$ tem solução. Por isso, começamos definido um conjunto $A = \{x \geq 0 : x^2 < a\}$.

(2) Para usar a propriedade do supremo com A, precisamos verificar as duas condições sobre o conjunto em questão: A não é vazio e A é limitado superiormente? (Observemos que aqui particularizamos a propriedade do supremo ao conjunto A definido em (1), obtendo uma implicação. Agora partimos para a verificação das hipóteses desta implicação para podermos concluir sua tese.)

(3) Mostramos que A é não vazio exibindo um elemento dele: $0 \in A$, pois como $a > 0$ e $0^2 = 0 < a$, este elemento satisfaz a condição para pertencer a A.

(4) Mostramos que se $M = \max\{1, a\}$, então todos os elementos x de A satisfazem $x \leq M$, considerando as duas possibilidades: $x \leq 1$, donde $x^2 \leq x \leq 1 \leq M$, ou $x > 1$, donde $M \geq a > x^2 > x$.

(5) De (3) e (4), concluímos que A tem supremo, que chamamos de s. (Observemos que este s refere-se a um elemento específico, e não genérico.)

(6) Tivemos que mostrar que $s^2 = a$. Para isto, usamos prova por contradição. Ou seja, supomos que $s^2 \neq a$, dividindo nos dois casos possíveis: $s^2 > a$ e $s^2 < a$. Vimos que tanto a condição $s^2 > a$ como $s^2 < a$ permitiram concluir que s não poderia ser o supremo de A, contrariando (5).

(7) Supondo que $s^2 > a$, encontramos um número real $\varepsilon > 0$ tal que $(s - \varepsilon)^2 > a$, concluindo que s não era o supremo (ou menor limitante superior) de A, contradição a (5).

(8) Supondo que $s^2 < a$, novamente encontramos um $\varepsilon > 0$ tal que $(s + \varepsilon)^2 < a$, outra vez concluindo que s não era o supremo (ou menor limitante superior) de A, novamente contradizendo (5).

Desafio aos leitores: Os leitores podem treinar-se, demonstrando que se $a > 0$ então a equação $x^2 = a$ tem exatamente duas soluções, $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$. Claramente estes dois números reais são soluções de $x^2 = a$. Quem garante que não possa haver outra solução? Para provar isto, usem as propriedades da ordem para mostrar que se $x \neq \pm\sqrt{a}$ (ou seja, ou $x < -\sqrt{a}$, ou $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$, ou $\sqrt{a} < x$)

então $x^2 \neq a$.

Vamos deduzir a fórmula de Bhaskara, que resolve equações do segundo grau.

Fórmula de Bhaskara: (Supondo que $a \neq 0$) $ax^2 + bx + c = 0$ se, e somente se, $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Dedução: A idéia é completar quadrados perfeitos. Somando-se $-c + b^2/4a$ dos dois lados da equação, obteremos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a}$$

donde, isolando-se x, obteremos o resultado.

Análise da dedução: Foram usadas apenas as propriedades da soma e produto de números reais. Detalhemos esta dedução:

(1) Citemos a equação: $ax^2 + bx + c = 0$.

(2) Somamos aos dois lados o termo $-c + b^2/4a$, obtendo $ax^2 + bx + c - c + b^2/4a = 0 - c + b^2/4a$. (Aqui usamos a propriedade da soma: se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a = b$, então $a + c = b + c$.)

(3) Rearranjamos os termos, concluímos que: $ax^2 + bx + b^2/4a = -c + b^2/4a$.

(4) Novamente rearranjamos os termos: $a(x + b/2a)^2 = (b^2 - 4ac)/4a$. (Usando várias vezes a propriedade distributiva.)

(5) Multiplicando os dois lados da equação por $1/a$, concluímos que: $(x+b/2a)^2 = (b^2-4ac)/4a^2$.

(6) Usando o desafio aos leitores acima, temos duas soluções à equação em (5): $(x + b/2a) = (\pm\sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

(7) Finalmente, somamos aos dois lados da equação em (6) o termo $-b/2a$, obtendo: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

Por fim, vamos apresentar uma demonstração por redução ao absurdo.

Teorema: Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que para todo natural n, valha $nx \leq y$. Consideremos o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto A é não vazio, pois $x = 1x \in A$, e é limitado superiormente por y, logo admite supremo. Seja s o supremo de A. Sabemos que $0 < x$, donde $s - x$ não é limitante superior de A. Portanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$. Mas, daí, $s < (m + 1)x$, contradizendo o fato de s ser o supremo de A.

Análise da demonstração: Esta é uma demonstração por redução ao absurdo, como é indicado no início. Então vamos mostrar que a negação do teorema implica (ou seja, permite concluir) uma coisa falsa.

Primeiramente, reconheçamos qual é a negação do teorema: ele é da forma hipótese implica tese. A hipótese é: $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$; a tese é existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Como fica a negação disto? Dizer que A não implica B é dizer que pode valer A e não valer B. Ou seja, a negação do teorema fica sendo: hipótese e não a tese. Vamos provar que isto implica uma contradição (ou absurdo). Ou seja, a negação do teorema será usada como nova hipótese.

(1) Citamos a hipótese: para todo natural n, vale $nx \leq y$. (Isto é a negação da tese.)

(2) Definimos o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. (Novamente usaremos a propriedade do supremo, particularizada a este A, etc.)

(3) Mostramos que A não é vazio, exibindo um elemento dele: $x = 1x \in A$. (Escrevemos $x = 1x$ para evidenciar que o próprio x satisfaz a condição para pertencer a A.)

(4) De (1), concluímos que A é limitado superiormente (por y).

(5) Citamos a propriedade do supremo: se A não for vazio e for limitado superiormente então possuirá supremo (que é o menor limitante superior de A).

(6) Concluímos, de (3), (4) e (5), que existe o supremo (ou menor limitante superior) de A, que chamamos de s.

(7) Citamos outra hipótese: $x > 0$.

(8) Concluímos que $s - x < s$, (somando-se s aos dois lados da desigualdade; aqui usamos a propriedade da desigualdade que diz: se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então $a + c < b + c$).

(9) Concluímos (da definição de supremo) que $s - x$ não é limitante superior de A.

(10) Concluímos que existe algum elemento de A, que deve ser da forma mx, para algum $m \in \mathbb{N}$, tal que $s - x < mx$.

(11) Concluímos que $s < (m + 1)x$, (somando-se x aos dois lados da desigualdade; novamente usamos a propriedade citada em (8)).

(12) A conclusão acima está dizendo que s não é limitante superior de A. Isto nega que s seja o supremo de A.

Ou seja, concluímos que existe um número real que é e, ao mesmo tempo, não é limitante superior de A!

Portanto, da negação do teorema concluímos uma contradição. Daí concluímos que o teorema tem que ser verdadeiro.

Bom, os leitores estão convidados a usar este tipo de análise de todas as demonstrações que encontrarem pelo caminho, tornando o estudo de um texto ou de uma disciplina mais proveitoso.

6 Algumas dicas para demonstrar teoremas

Como já foi dito, não é fácil descobrir uma demonstração. Isto depende de experiência. Mas podem ser dadas algumas sugestões que talvez ajudem a descobri-las.

Primeiro, pode-se tentar imitar demonstrações já vistas.

Segundo, tentem caminhar “ao contrário,” ou seja, partam da tese, busquem transformações ou resultados anteriores que permitam concluir esta tese. Verifique quais as hipóteses que levam a tal tese. Olhe cada hipótese como uma conclusão intermediária, buscando resultados anteriores que permitam conclui-las, e assim por diante, até chegarmos às hipóteses do que queremos demonstrar. Depois é só passar a limpo, na ordem certa.

Terceiro: experiência. Não tem jeito. Só com muito treino (e paciência!) se consegue enfrentar uma demonstração sem desistir no meio do caminho.

Exemplo: Como foi demonstrado acima que todo número real positivo tem uma raiz quadrada (positiva)?

Lá foi usada a propriedade do supremo. Por que precisamos usá-la?

Bom, tínhamos em mãos as propriedades dos números reais. As propriedades da soma, do produto e da ordem não eram suficientes, pois elas também valem para os números racionais, e sabemos que nem todo número racional tem raiz quadrada racional. (Aqui entra a experiência...)

Por isso, a única propriedade que sobrou foi a do supremo. Para isto, precisamos achar um conjunto A que não fosse vazio e fosse limitado superiormente. Que propriedade usar? Uma primeira idéia seria, por exemplo, $A = \{x : x^2 = a\}$. Só que para mostrar que este A não é vazio precisaríamos mostrar que a tem raiz quadrada. Mas é justamente isto que estávamos tentando mostrar. Não podemos assumir a existência dela para mostrar que ela existe! Uma outra tentativa seria usar uma desigualdade, já que a igualdade não serviu. Como queríamos um conjunto limitado superiormente, tentamos $A = \{x : x^2 < a\}$. E como queríamos achar uma raiz quadrada positiva, acrescentamos a condição de que $x \geq 0$, isto é, tomamos $A = \{x : x \geq 0 \text{ e } x^2 < a\}$. Com este conjunto tivemos mais sorte, pois foi relativamente fácil mostrar que ele não era vazio. Para mostrar que ele era limitado superiormente foi apenas um pouco mais trabalhoso.

O próximo passo era mostrar que o supremo de A, que chamamos de s, era a raiz quadrada de a, ou seja, $s^2 = a$. Bom, tal s só poderia satisfazer uma das duas condições: ou $s^2 = a$ ou $s^2 \neq a$. Para mostrarmos que não poderia satisfazer $s^2 \neq a$, mostramos que esta condição levaria a alguma contradição. Fizemos isto dividindo o problema em dois casos: $s^2 > a$, ou $s^2 < a$. Em cada um destes casos, tentamos mostrar que s não podia ser supremo de A.

No caso em que $s^2 > a$, tentamos mostrar que s não poderia ser o menor limitante superior de A, tentando achar outro limitante superior de A menor que s. Tentamos, então achar algum $\varepsilon > 0$ de modo que $s - \varepsilon$ ainda fosse limitante superior de A. Ou seja, deveria satisfazer a desigualdade $(s - \varepsilon)^2 > a$. Desenvolvendo o quadrado, teríamos que achar algum $\varepsilon > 0$ tal que $s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > a$, ou seja, $2s\varepsilon - \varepsilon^2 < s^2 - a$. Poderíamos tentar resolver esta desigualdade de segundo grau em ε. Mas (e aqui novamente entra a experiência) vimos que bastava achar ε tal que $2s\varepsilon < s^2 - a$, pois, neste caso, $2s\varepsilon - \varepsilon^2 < 2s\varepsilon < s^2 - a$. Bastou então tomarmos $\varepsilon = (s^2 - a)/3s$. Entretanto, seria possível resolver a desigualdade de segundo grau (sem assumir que existem raízes quadradas!...)

No caso em que $s^2 < a$, vimos que neste caso $s \in A$. Por isso queríamos achar $\varepsilon > 0$ tal que $s + \varepsilon \in A$, contradizendo o fato de s ser limitante superior de A. Para isto, tínhamos que resolver a desigualdade $(s + \varepsilon)^2 < a$, ou $s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < a$. Mas, ao invés de tentar resolver uma desigualdade de segundo grau, se restrigirmos $\varepsilon < 1$, sabemos que $\varepsilon^2 < \varepsilon$. Daí, foi só tentar acertar a desigualdade $2s\varepsilon + \varepsilon^2 < 2s\varepsilon + \varepsilon = (2s + 1)\varepsilon < a - s^2$, não esquecendo de impor que $\varepsilon < 1$.