Teoria dos Modelos: Ultraprodutos

Ricardo Bianconi

Sumário

1 Introdução **1**

2 Filtros e Ultrafiltros **2**

3 Ultraprodutos de Estruturas **3**

4 Exercícios **5**

5 Extensões da Lógica de Primeira Ordem **7**

5.1 Linguagens de Segunda Ordem 7

5.2 Linguagens Infinitárias 11

6 Cardinais Mensuráveis **13**

7 Mais exercícios **22**

Parte I: Teoria Básica

1 Introdução

Vamos estudar neste texto outra construção de modelos, os chamados ultraprodutos, que são quocientes (ou imagens homomórficas) de produtos de estruturas obtidos por uma relação de congruência.

2 Filtros e Ultrafiltros

Dado um conjunto não vazio I, um filtro F sobre I é um conjunto não vazio de subconjuntos de I tal que $\varnothing \notin F$; se $A, B \in F$, então $A \cap B \in F$; se $A \in F$ e $A \subseteq B \subseteq I$ então $B \in F$. Um ultrafiltro é um filtro maximal com respeito à inclusão, isto é, se U é ultrafiltro e F é filtro tais que $U \subseteq F$ então $U = F$.

Um conjunto não vazio A de subconjuntos de I tem a **pif (propriedade da intersecção finita)** se, para cada parte finita $A_0 \subset A$, $\bigcup A_0 \neq \varnothing$.

Lema 2.1 Se o conjunto não vazio A de partes de I tem a pif, então existe um filtro $F \supset A$.

Demonstração: Seja $F = \{X \subset I : \text{existem } n \in \mathbb{N} \text{ e } X_0, \ldots, X_n \in A_0, \text{ tais que } X_0 \cap \ldots \cap X_n \subset X\}$.

Observe que, por definição, $\varnothing \notin F$ e que $I \in F \neq \varnothing$. Sejam $X, Y \in F$, e sejam $X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_m \in A$, tais que $\bigcap_i X_i \subseteq X$ e $\bigcap_j Y_j \subseteq Y$. Então $\bigcap_i X_i \cap \bigcap_j Y_j \subseteq X \cap Y \in F$.

Por fim, sejam $X \in F$, $X \subseteq Y \subseteq I$, e sejam $X_0, \ldots, X_n$, tais que $\bigcap_i X_i \subseteq X$. Então $\bigcap_i X_i \subseteq Y \in F$.

Ou seja, F é um filtro. $\square$

Lema 2.2 Para todo filtro F em I, existe um ultrafiltro U em I, tal que $F \subseteq U$.

Demonstração: Seja $W = \{F' : \text{tal que } F' \text{ é filtro em } I \text{ e } F \subseteq F'\}$. Então $F \in W \neq \varnothing$. Seja Λ um conjunto linearmente ordenado e sejam $F_\lambda \in W$ tais que, se $\alpha, \beta \in \Lambda$ e $\alpha \leq \beta$, então $F_\alpha \subseteq F_\beta$. Então $F^* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é um filtro, pois, claramente $\varnothing \notin F^* \neq \varnothing$; se $X, Y \in F^*$, existe $\lambda \in \Lambda$, tal que $X, Y \in F_\lambda$ e, portanto, $X \cap Y \in F_\lambda \subseteq F^*$; e, finalmente, se $X \in F^*$ e $X \subseteq Y \subseteq I$, existe λ tal que $X \in F_\lambda$, donde segue que $Y \in F_\lambda \subseteq F^*$. Ou seja, F^* também é filtro. Com isto, pelo Lema de Zorn, existe (pelo menos) um elemento maximal (pela ordem parcial da inclusão) $U \in W$. Então U é ultrafiltro, pois se $U \subseteq U'$ e U' é ultrafiltro, teríamos que $F \subseteq U'$, donde $U' \in W$. Como U é elemento maximal de W, $U = U'$. $\square$

Lema 2.3 O filtro U é ultrafiltro se, e só se, para todo $A \subseteq I$, ou $A \in U$, ou $I \setminus A \in U$.

Demonstração: Se U é ultrafiltro, $A \subseteq I$ e $A \notin U$, então $U \cup \{A\}$ não tem a pif, pois senão poderia ser estendido a um filtro maior, contradição. Portanto, existem $X_0, \ldots, X_n \in U$ tal que $\bigcup X_i \cap A = \varnothing$. Isto quer dizer que $\bigcup X_i \subseteq I \setminus A$. Como U é filtro, $I \setminus A \in U$.

Reciprocamente, se U é filtro tal que para todo $A \subseteq I$, ou $A \in U$, ou $I \setminus A \in U$, seja $W = \{B \subseteq I : B \notin U\}$. Se U' é filtro tal que $U \subseteq U'$, seja $A \in U'$. Então $A \notin W$, pois senão, $I \setminus A \in U \subseteq U'$ e $A \cap (I \setminus A) = \varnothing \in U'$, contradição. Portanto $U = U'$, e u é ultrafiltro. $\square$

3 Ultraprodutos de Estruturas

Dada uma família de $\mathcal{L}$-estruturas $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$, indexada num conjunto não vazio I, e dado um filtro F em I, definimos como o **produto reduzido** (ou **ultraproduto**, quando F for ultrafiltro) desta família como a estrutura $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / F$ cujo domínio é o conjunto das classes de equvalência de $\prod_{i \in I} M_i$ pela relação $f \sim_F g$ se $\{i \in I : f(i) = g(i)\}$ está em F. Denotaremos a classe de f por $[f]_F$ ou simplesmente $[f]$ quando F for subentendido. Sobre este conjunto interpretamos $\mathcal{L}$ assim:

- se c é constante, $c^{\mathcal{M}}$ é a classe de $\{c^{\mathcal{M}_i} : i \in I\}$;
- se f é função n-ária, $f^{\mathcal{M}}([x_1], \ldots, [x_n]) = [f^{\mathcal{M}_i}(x_1(i), \ldots, x_n(i))]$;
- se P é relação n-ária, $([x_1], \ldots, [x_n]) \in P^{\mathcal{M}}$ se, e só se, $\{i \in I : (x_1(i), \ldots, x_n(i)) \in P^{\mathcal{M}_i}\}$ estiver em F.

Teorema 3.1 (Łoś) Dada uma família de $\mathcal{L}$-estruturas $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$, atribuições de valores $s_i : \text{Var} \to M_i$, fórmula φ, e ultrafiltro U em I, então

$$\prod_{i \in I} M_i/U \models \varphi[s] \Leftrightarrow \{i : M_i \models \varphi[s_i]\} \in U,$$

sendo que s é a atribuição de valores $s(x) = [s_i(x) : i \in I]$ (classe dos $s_i(x)$).

Demonstração: Por indução na complexidade de φ, sendo que o passo inicial, para fórmulas atômicas, é imediato pela definição de ultraproduto.

Denotemos o ultraproduto $\prod_{i \in I} M_i/U$ por M.

Se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$ então $M \models \varphi[s]$ se, e só se, $M \models \phi_1[s]$ e $M \models \phi_2[s]$. Por hipótese de indução $\{i : M_i \models \phi_1[s_i]\} \in U$ e $\{i : M_i \models \phi_2[s_i]\} \in U$. Como U é filtro, $\{i : M_i \models \varphi[s_i]\} = \{i : M_i \models \phi_1[s_i]\} \cap \{i : M_i \models \phi_2[s_i]\} \in U$.

Se φ é $\phi_1 \vee \phi_2$ então $M \models \varphi[s]$ se, e só se, $M \models \phi_1[s]$ ou $M \models \phi_2[s]$. Por hipótese de indução $\{i : M_i \models \phi_1[s_i]\} \in U$ ou $\{i : M_i \models \phi_2[s_i]\} \in U$. Suponhamos que $\{i : M_i \models \phi_1[s_i]\} \in U$. Como U é filtro, $\{i : M_i \models \varphi[s_i]\} \supseteq \{i : M_i \models \phi_1[s_i]\}$ e portanto $\{i : M_i \models \varphi[s_i]\} \in U$. A recíproca é análoga.

Se φ é $\exists x \phi$ então $M \models \varphi[s]$ se, e só se, existe $b \in M$ tal que se $s'(x) = b$ e $s'(y) = s(y)$ nas outras variáveis, $M \models \phi[s']$. Por hipótese de indução, $\{i : M_i \models \phi[s'_i]\} \in U$. Mas daí, $\{i : M_i \models \exists x \phi[s_i]\} \in U$.

O caso do quantificador $\forall$ é tratado de modo análogo.

Finalmente tratemos da negação. É aqui que entra a necessidade do filtro U ser maximal. Se φ é $\neg\phi$, $M \models \varphi[s]$ se, e só se, $M \not\models \phi[s]$. Por hipótese de indução, $\{i : M_i \models \phi[s_i]\} \notin U$. Como U é filtro maximal, $\{i : M_i \models \neg\phi[s_i]\} = \{i : M_i \not\models \phi[s_i]\} \in U$. $\square$

Como corolário da demonstração, temos o seguinte resultado. Nele, **fórmula positiva** refere-se a qualquer fórmula em que não ocorra o símbolo da negação, $\neg$.

Teorema 3.2 (Łoś para fórmulas positivas) Dada uma família de $\mathcal{L}$-estruturas $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$, atribuições de valores $s_i : \text{Var} \to M_i$, fórmula positiva φ, e filtro F em I, então

$$\prod_{i \in I} M_i/F \models \varphi[s] \Leftrightarrow \{i : M_i \models \varphi[s_i]\} \in U,$$

sendo que s é a atribuição de valores $s(x) = [s_i(x) : i \in I]$ (classe dos $s_i(x)$).
$\square$

Outro corolário é o muito útil é o Teorema da Compacidade, que será demonstrado agora usando ultraprodutos. Mais adiante veremos outra demonstração.

Teorema 3.3 (Compacidade) Seja Γ um conjunto de sentenças, tal que, para cada parte finita $\Sigma \subset \Gamma$, exite um modelo $M_\Sigma \models \Sigma$. Então existe modelo $M \models \Gamma$.

Demonstração: Seja $I = \{\Sigma : \Sigma \subset \Gamma \text{ é finito}\}$. Para cada $\Sigma \in I$, seja $J_\Sigma = \{\Sigma' : \Sigma \subseteq \Sigma'\}$. Sejam $\Sigma_i \in I$, $i = 0\ldots, n$. Então $\Sigma \in \bigcap_i J_{\Sigma_i}$ se, e só se, $\Sigma_i \subseteq \Sigma$, para cada $i = 0, \ldots, n$. Ou seja, $\bigcap_i J_{\Sigma_i} = J_{\bigcup_i \Sigma_i} \neq \varnothing$. Portanto o conjunto $A = \{J_\Sigma : \Sigma \in I\}$ tem a pif e, portanto, existe um ultrafiltro $U \supset A$ em I.

Sejam $M_\Sigma \models \Sigma$, $\Sigma \in I$ e $M = \prod_{i \in I} M_i/U$. Seja $\varphi \in \Gamma$. Então $\{\Sigma \in I : \varphi \in \Sigma\} \supseteq J_{\{\varphi\}} \in U$, ou seja, $\{\Sigma \in I : \varphi \in \Sigma\} \in U$. Pelo teorema de Łoś, $M \models \varphi$. Portanto $M \models \Gamma$. $\square$

4 Exercícios

Exercício 4.1 (Filtros e Ultrafiltros) Mostre que todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro. O **filtro de Fréchet** F sobre o conjunto I é o conjunto dos subconjuntos cofinitos de I. Mostre que F é filtro. Um ultrafiltro U sobre I é **principal** se existe $i \in I$ tal que $\{i\} \in I$. Mostre que um ultrafiltro é não principal se, e só se, contém o filtro de Fréchet.

Exercício 4.2 Mostre que se U é ultrafiltro principal (suponha que $\{i\} \in I$) então $\prod_{i \in I} M_i/U$ é isomorfo a M_i.

Exercício 4.3 Mostre que finitude (sem especificar tamanho) não é propriedade de primeira ordem, ou seja, se Γ é conjunto de sentenças que tem modelos finitos M_i de cardinalidades finitas $n_i \geq i$, $i \in \mathbb{N}$, então Γ tem modelo infinito.

Um conjunto linearmente ordenado $(X,<)$ é **bem ordenado** se para todo $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$, existe $a \in A$, tal que $a = \min A$ (ou seja, $x \geq a$, para todo $x \in A$).

Exercício 4.4 Mostre que $(X,<)$ é bem ordenado se, e só se, para todos $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $x_{n+1} \leq x_n$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_n = x_N$, para todo $n \geq N$.

Exercício 4.5 Mostre que se $(X,<)$ é bem ordenado e infinito, existe um ultraproduto de X que não é bem ordenado. (Para isto, use $I = \mathbb{N}$, tome U não principal em I, e olhe para as classes das seqüências $F_k(n) = \max(0, n-k)$.)

Um filtro é ω**-completo** se, para toda seqüência $X_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_n X_n \in F$.

Exercício 4.6 Mostre que todo ultrafiltro ω-completo em $\mathbb{N}$ é principal. (Lembre-se do filtro de Fréchet.)

Exercício 4.7 Mostre que se U é ultrafitro não principal ω-completo em I e $(X,<)$ é bem ordenado, então $M = \prod_I X/U$ também é bem ordenado. (Suponha que não obtenha sequencia de classes $[f_n] \in M$ estritamente decrescente; use que U é ω-completo, para obter um índice $i \in I$, tal que $f_n(i)$ froma uma seqüência estritamente decrescente em X.)

Exercício 4.8 Mostre que se o ultrafiltro U não é ω-completo em I, então não é principal.

Exercício 4.9 Mostre que se o ultrafiltro U não é ω-completo em I, então existem $X_n \in U$, tais que $X_{n+1} \subsetneq X_n$, $n \in \mathbb{N}$, e $\bigcap_n X_n = \varnothing$.

Exercício 4.10 Mostre que se o ultrafiltro U não é ω-completo em I, e $(X,<)$ é bem ordenado e infinito, então $M = \prod_I X/U$ não é bem ordenado. (Para isto, sejam $x_n \in X$, tais que $x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ –como obtê-los?– sejam $X_n \in U$, como no exercício acima, tomando $X_0 = I$; sejam $f_m \in \prod_I X$, tais que $f_m(i) = x_{\max(0,n-m)}$, sendo que $n = n(i)$ é tal que $i \in X_n \setminus X_{n+1}$; etc.)

Parte II: Teoria Avançada

5 Extensões da Lógica de Primeira Ordem

5.1 Linguagens de Segunda Ordem

Uma **linguagem de segunda ordem** consiste num alfabeto que contém os símbolos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ e $\forall$, e também o da igualdade $=$ será considerado como símbolo lógico; um conjunto enumerável de símbolos de variáveis (de primeira ordem) $\mathrm{Var}^1 = \{x_n : n \in \omega\}$; um conjunto enumerável de símbolos de variáveis funcionais (de segunda ordem) $\mathrm{Var}^2_F = \{f_{m,n} : m, n \in \omega\}$; um conjunto enumerável de símbolos de variáveis relacionais (de segunda ordem) $\mathrm{Var}^2_R = \{P_{m,n} : m, n \in \omega\}$; símbolos não lógicos são os de uma assinatura L; além disso a linguagem tem regras (gramaticais) de formação de expressões bem fundadas, ou fórmulas e sentenças.

Para descrever as regras gramaticais, comecemos pelos **termos de** L (ou L-termos):

Somente serão considerados termos as seqüências de símbolos s de L para as quais existe uma seqüência finita $s_1, \ldots, s_m$ tal que s é s_m e cada s_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- s_i é uma variável, ou
- um símbolo de constante, ou
- s_i é $f(s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$ sendo que f é um símbolo de função n-ária, ou $f = f_{m,n} \in \mathrm{Var}^2_F$, e $i_1, \ldots, i_n < i$ (isto é, já foram obtidos anteriormente).

Com isto também podemos definir a **complexidade do termo** s, $c(s)$, como o menor m tal que existe uma seqüência como acima (do mesmo modo como em primeira ordem).

Agora podemos definir **fórmula de** L (ou L-fórmula).

Somente serão consideradas fórmulas as seqüências de símbolos φ de L para as quais existe uma seqüência finita $\phi_1, \ldots, \phi_m$ tal que φ é ϕ_m e cada ϕ_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- ϕ_i é $t_1 = t_2$, sendo que t_1 e t_2 são termos, ou
- $R(t_1, \ldots, t_n)$, sendo que R é símbolo relacional n-ário de L, ou $P = P_{m,n} \in \mathrm{Var}^2_R$, e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, ou
- $\phi_j \wedge \phi_k$, ou $\phi_j \vee \phi_k$, ou $\neg\phi_j$, em que $j, k < i$, ou
- **(quantificação de primeira ordem)** $\exists x \phi_k$ or $\forall x \phi_k$, sendo que $x \in \mathrm{Var}^1$ é uma variável e $k < i$, ou
- **(quantificação de segunda ordem funcional)** $\exists f \phi_k$ or $\forall f \phi_k$, sendo que $f \in \mathrm{Var}^2_F$ é uma variável e $k < i$, ou
- **(quantificação de segunda ordem relacional)** $\exists X \phi_k$ or $\forall X \phi_k$, sendo que $X \in \mathrm{Var}^2_R$ é uma variável e $k < i$.

As fórmulas do tipo $t_1 = t_2$ e do tipo $R(t_1, \ldots, t_n)$ são chamadas de **fórmulas atômicas**.

Com isto também podemos definir a **complexidade da fórmula** φ como o menor m tal que existe uma seqüência como acima.

Vamos definir agora a extensão da relação de **satisfação** para esta lógica, $\models$, que relaciona estruturas e fórmulas. Vamos definir esta relação por indução na complexidade das fórmulas. Dadas uma estrutura M, **atribuições de valores** $s_1 : \mathrm{Var}^1 \cup \mathrm{Var}^2_R \to M$, $s_F : \mathrm{Var}^2_F \to \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{Fun}(M^n, M)$, $(s_F(f_{m,n}) \in \mathrm{Fun}(M^n, M))$, $s_R : \mathrm{Var}^2_R \to \bigcup_{n \geq 1} P(M^n)$, $(s_R(P_{m,n} \in P(M^n))$ e uma fórmula φ, definimos $M \models \varphi[s_1, s_F, s_R]$ por etapas.

Primeiramente, definiremos **interpretação de termos** em M dada $s = (s_1, s_F, s_R)$, $t^M[s]$ ou apenas $s(t)$, como:

- se t é a constante c, $t^M[s] = c^M$;
- se t é uma variável x, $t^M[s] = s(x)$;
- se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, com $f \in L$ n-ária, $t^M[s] = f^M(t_1^M[s], \ldots, t_n^M[s])$;
- se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, com $f = f_{m,n} \in \mathrm{Var}^2_F$, n-ária, $t^M[s] = s_F(f_{m,n})(t_1^M[s], \ldots, t_n[s])$.

Usaremos apenas a notação $s(t)$ no lugar de $t^M[s]$, reservando esta última quando for necessária.

Agora definiremos **interpretação das fórmulas** em M, isto é, a relação $M \models \varphi[s]$ (leia-se M satisfaz φ em s, ou que M é **modelo** de φ):

- se φ é atômica, $P(t_1, \ldots, t_n)$, com $P \in L$, (incluindo o caso $t_1 = t_2$), $M \models \varphi[s]$ se $(s(t_1), \ldots, s(t_n)) \in P^M$;
- se φ é atômica, $X(t_1, \ldots, t_n)$, com $X = P_{m,n} \in \mathrm{Var}^2_R$, $M \models \varphi[s]$ se $(s(t_1), \ldots, s(t_n)) \in s_R(X)$;
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ e $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ ou $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\neg\phi$, $M \models \varphi[s]$ se não ocorrer que $M \models \phi[s]$ (ou $M \not\models \phi[s]$);
- se φ é $\exists x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se existir $a \in M$ tal que se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\forall x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se para cada $a \in M$, se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\exists f_{m,n}\phi$, $M \models \varphi[s]$ se existir $g \in mathrmFun(M^n, M)$ tal que se $s' : \mathrm{Var}^2_F \to \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Fun}(M^n, M)$ satisfaz $s'(f_{m,n}) = g$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\forall f_{m,n}\phi$, $M \models \varphi[s]$ se para cada $g \in mathrmFun(M^n, M)$, se $s' : \mathrm{Var} \to M$ satisfaz $s'(f_{m,n}) = g$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\exists P_{m,n}\phi$, $M \models \varphi[s]$ se existir $R \in P(M^n)$ tal que se $s'_R : \mathrm{Var}^2_R \to \bigcup_{n\geq 1} P(M^n)$ satisfaz $s'_R(P_{m,n}) = R$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;
- se φ é $\forall x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se para cada $R \in P(M^n)$, se $s'_R : \mathrm{Var}^2_R \to \bigcup_{n\geq 1} P(M^n)$ satisfaz $s'_R(x) = R$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$.

Diremos que ϕ e ψ são logicamente equivalentes se para toda L-estrutura M, $M \models \phi \to \psi$ e $M \models \psi \to \phi$.

Classificamos as fórmulas conforme a quantidade de alternâncias de quantificadores da seguinte forma (veja o exercício 7.1):

- se ψ não tem quantificadores, dizemos que ela é Σ^0_0, Π^0_0 e Δ^0_0, e escrevemos $\psi \in \Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \Delta^0_0$;
- para $n \geq 0$, se $\psi \in \Sigma^0_n$ e $x \in \mathrm{Var}^1$, então $\exists x\psi \in \Sigma^0_n$ e $\forall x \in \Pi^0_{n+1}$;
- para $n \geq 0$, se $\psi \in \Pi^0_n$ e $x \in \mathrm{Var}^1$, então $\exists x\psi \in \Sigma^0_{n+1}$ e $\forall x \in \Pi^0_n$;
- se ψ for equivalente a uma fórmula Π^0_n e a uma Σ^0_n, então dizemos que $\psi \in \Delta^0_n$;
- se $\psi \in \Pi^0_n \cup \Sigma^0_n$, e $X \in \mathrm{Var}^2_F \cup \mathrm{Var}^2_R$, então $\exists X\psi \in \Sigma^1_1$ e $\forall X\psi \in \Pi^1_1$;
- para $n \geq 1$, se $\psi \in \Sigma^1_n$ e $X \in \mathrm{Var}^2_F \cup \mathrm{Var}^2_R$, então $\exists X\psi \in \Sigma^1_n$ e $\forall X \in \Pi^1_{n+1}$;
- para $n \geq 0$, se $\psi \in \Pi^0_n$ e $X \in \mathrm{Var}^2_F \cup \mathrm{Var}^2_R$, então $\exists X\psi \in \Sigma^1_{n+1}$ e $\forall X \in \Pi^1_n$;
- se ψ for equivalente a uma fórmula Π^1_n e a uma Σ^1_n, então dizemos que $\psi \in \Delta^1_n$.

Temos a seguinte extensão do Teorema de Łoś, cuja prova fica como exercício:

Teorema 5.1 (Łoś para Σ^1_1-fórmulas) Se $\psi \in \Sigma^1_1$, então $\prod_{i\in I} M_i/U \models \psi[s]$, se e só se, $\{i \in I : M_i \models \psi[s(i)]\} \in U$. $\square$

Observe-se que este resultado já não vale no caso de $\psi \in \Pi^1_1$: $\forall f(\forall x\forall y(x \neq y \to f(x) \neq f(y)) \to \forall y\exists x(f(x) = y))$ só é válida em estruturas finitas (de qualquer tamanho).

5.2 Linguagens Infinitárias

Dada assinatura L e cardinais infinitos $\beta \leq \alpha$, definimos a linguagem infinitária $L_{\alpha\beta}$ como sendo a seguinte extensão da linguagem de primeira ordem. O conjunto de variáveis agora é indexado em ordinais menores que α, $\mathrm{Var} = \{x_\eta : \eta < \alpha\}$. As fórmulas atômicas são as mesmas da linguagem de primeira ordem (usando também essas variáveis). A negação e a implicação também são as mesmas. Só o que muda são:

- se $\lambda < \alpha$ e $\{\phi_\eta : \eta < \lambda\}$ são fórmulas, então $\bigwedge_{\eta<\lambda} \phi_\lambda$ e $\bigvee_{\eta<\lambda} \phi_\lambda$ são fórmulas;
- se $X \subset \mathrm{Var}$ for tal que $|X| < \beta$, então $\exists X \phi$ e $\forall X \phi$ são fórmulas.

Observe-se que, com essa notação $L_{\omega\omega}$ é a lógica de primeira ordem.

A interpretação em L-estruturas é a mesma para fórmulas atômicas, para $\rightarrow$ e para $\neg$, e, levando em conta que as fórmulas agora podem ter infinitas variáveis livres, temos que:

- $M \models \bigwedge_{\eta<\lambda} \phi_\lambda[s]$ se, e só se, $M \models \phi_\eta[s]$, para todo $\eta < \lambda$;
- $M \models \bigvee_{\eta<\lambda} \phi_\lambda[s]$ se, e só se, $M \models \phi_\eta[s]$, para algum $\eta < \lambda$;
- se $X \subset \mathrm{Var}$ e $|X| < \beta$, $M \models \exists X \phi[s]$, se existir $s' : \mathrm{Var} \rightarrow M$, tal que $s'(x) = s(x)$ para toda variável $x \notin X$ e $M \models \phi[s']$;
- se $X \subset \mathrm{Var}$ e $|X| < \beta$, $M \models \forall X \phi[s]$, se para todo $s' : \mathrm{Var} \rightarrow M$, tal que $s'(x) = s(x)$ para toda variável $x \notin X$, vale que $M \models \phi[s']$.

A versão do Teorema de Łoś para estas linguagens depende do ultrafiltro.

Seja $\kappa \geq \omega$ um cardinal. Dizemos que o ultrafiltro U é

- κ-completo se para todo cardinal $\lambda < \kappa$ e toda família $\{X_\eta : \eta < \lambda\} \subseteq U$, $\bigcap_{\eta<\lambda} X_\eta \in U$;
- κ-incompleto se existe uma família $\{X_\eta : \eta < \kappa\} \subseteq U$, tal que $\bigcap_{\eta<\kappa} X_\eta \notin U$.

Observe-se que, pela definição de filtro, todo (ultra)filtro é ω-completo. Também deve ser observado que se U é α-completo e $\beta \leq \alpha$, então U é β-completo.

Lema 5.2 Seja U um ultrafiltro sobre o conjunto I de cardinalidade $|I| = \alpha$. Se U for α^+-completo, então U é principal.

Demonstração: Seja $E = \{X_i = I \setminus \{i\} : i \in I \text{ e } X_i \in U\}$. Como $|E| \leq |I| < \alpha^+$, $Y = \bigcap E \in U$. Seja $W \in U$. Mostraremos que $Y \subseteq W$ e, portanto, que U é principal. Se $i \notin W$, então $W \subseteq X_i \in U$ e, consequentemente, $i \notin Y$, ou seja $Y \subseteq W$, como queríamos mostrar. Observe-se que, por U ser ultrafiltro, $Y = \{i_0\}$, para algum $i_0 \in I$. □

Como consequencia, todo ultrafiltro não principal sobre I é $|I|$-incompleto.

Outra caracterização útil de ultrafiltro κ-completo.

Lema 5.3 Sejam $\lambda < \kappa$ e $\{X_\eta : \eta < \lambda\}$ uma família de subconjuntos de I, dois a dois disjuntos e cuja união seja todo I, e U um ultrafiltro κ-completo sobre I. Então para algum $\eta_0 < \lambda$, $X_{\eta_0} \in U$.

Demonstração: Como U é ultrafiltro, se $X_\eta \notin U$, então $I \setminus X_\eta \in U$. Assim, dado que $\bigcap_{\eta<\lambda}(I \setminus X_\eta) = I \setminus \bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta = \varnothing$ e que U é κ-completo, devemos ter que, para algum $\eta_0 < \lambda$, $I \setminus X_{\eta_0} \notin U$, ou $X_{\eta_0} \in U$. □

Teorema 5.4 (Łoś para $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$) Se o ultrafiltro U for α-completo, então $\prod_{i\in I} M_i/U \models \phi[s]$ se, e só se, $\{i \in I : M_i \models \phi[s(i)]\} \in U$, para toda ϕ em $L_{\alpha\beta}$.

Demonstração: Por indução na complexidade das fórmulas, sendo que os casos não triviais referem-se às fórmulas $\bigwedge_{\eta<\lambda} \phi_\lambda[s]$ e $\bigvee_{\eta<\lambda} \phi_\lambda[s]$, $\lambda < \alpha$, onde o fato de U ser α-completo é necessário.

Então, $\prod_{i\in I} M_i/U \models \bigwedge_{\eta<\lambda} \phi_\lambda[s]$ se, e só se, para cada $\eta < \lambda$, $\prod_{i\in I} M_i/U \models \phi_\eta[s]$. Por hipótese de indução, para cada $\eta < \lambda$, $X_\eta = \{i \in I : M_i \models \phi_\eta[s(i)]\} \in U$ e, como U é α-completo, temos que $\bigcap_{\eta<\lambda} X_\eta = \{i \in I : M_i \models \bigwedge_{\eta<\lambda} \phi_\lambda[s(i)]\} \in U$. A recíproca é análoga.

O caso da fórmula $\bigvee_{\eta<\lambda}\phi_\lambda$ usa a caracterização de ultrafiltros α-completos dada pelo lema anterior. $\square$

6 Cardinais Mensuráveis

Vamos ver que a existência de ultrafiltros não principais κ-completos, para κ não enumerável, transcende a usual Teoria dos Conjuntos.

Dizemos que um cardinal $\kappa \geq \omega$ é **mensurável** se existe um ultrafiltro não principal e κ-completo U sobre um conjunto I de cardinalidade κ (usualmente usamos o próprio conjunto de ordinais κ como sendo I).

Obviamente ω é mensurável. Veremos que o próximo cardinal mensurável é de certa forma gigantesco.

Lembremos que uma ordem parcial $(X,\leq)$ é **bem fundada** se não existirem $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tais que sejam distintos e $x_{n+1} \leq x_n$. Uma ordem total $(X,\leq)$ bem fundada é chamada de boa ordem, e X é chamado de **conjunto bem ordenado**. Lembramos que os ordinais são conjuntos transitivos bem ordenados pela relação de pertinência.

Lema 6.1 Sejam U um ultrafiltro κ-completo sobre I, $\kappa > \omega$, e $(X,\leq)$ uma ordem parcial bem fundada. Então $\prod i \in IX/U$ é ordem parcial bem fundada. Se $(X,\leq)$ for bem ordenado, então $\prod i \in IX/U$ também é bem ordenado.

Demonstração: Isso decorre do Teorema de Łoś para $L_{\omega_1\omega_1}$ aplicado à fórmula $\neg(\exists(x_1,x_2,x_3,\ldots)\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(x_{n+1}\neq x_n \wedge x_{n+1}\leq x_n))$. $\square$

Façamos uma análise mais apurado do que esses ultraprodutos fazem com ordinais.

Teorema 6.2 Seja U um ultrafiltro κ-completo sobre $I=\kappa>\omega$ e seja α um ordinal. Então, se $\alpha<\kappa$, $\prod_{\eta<\kappa}\alpha/U$ é isomorfo a α; se $\alpha=\kappa$, então a inclusão canônica de κ em $\prod_{\eta<\kappa}\kappa/U$ leva-o num segmento inicial próprio; se $\alpha>\kappa$, então a inclusão canônica $j:\alpha\to\prod_{\eta<\kappa}\alpha/U$, identificando o ultraproduto com o ordinal λ correspondente à boa ordem, satisfaz $j(\eta) = \eta$ se $\eta < \kappa$ e $j(\kappa) > \kappa$ em λ.

Demonstração: Trabalharemos com a assinatura estendida $L = \{<\} \cup \{c_\eta : \eta < \kappa\}$ usando a ordem estrita e símbolos de constantes para cada ordinal $\eta < \kappa$, na linguagem $L_{\kappa\kappa}$.

No caso de $\alpha < \kappa$, usando o Teorema de Łoś para $L_{\kappa\kappa}$, Teorema 5.4, com a fórmula $\forall x \bigvee_{\eta<\alpha}(x = c_\eta)$, obtemos que $\prod_{\eta<\kappa} \kappa/U$ é isomorfo a α.

No caso de $\alpha = \kappa$, usamos o argumento anterior para todo $\beta < \kappa$, usando a fórmula $\forall x((x < c_\beta) \to \bigvee_{\eta<\beta}(x = c_\eta))$. Observe-se que a classe de $id : \kappa \to \kappa$, $id(\eta) = \eta$ no ultraproduto é maior do que qualquer classe de funções constantes e, por isso, o ordinal correspondente ao ultraproduto é maior do que κ.

Por fim, no caso de $\alpha > \kappa$, observe que as classes da função constante igual a κ, $g : \kappa \to \alpha$, e da função de inclusão de κ como segmento inicial de α, $h : \kappa \to \alpha$, satisfazem $[g] < [h]$. Daí, segue que $j(\kappa) = [h] > [g] > \kappa$, na identificação do ultraproduto com o ordinal λ correspondente. $\square$

Lembramos que um cardinal infinito κ é um **cardinal regular** se não existem $\lambda < \kappa$ e $\alpha_\eta < \kappa$, $\eta < \lambda$, tais que $\kappa = \sup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta$ (ou, equivalentemente, $\kappa = \bigcup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta$). Caso contrário, chamamos κ de **cardinal limite (fraco)**. Um cardinal κ é sucessor se existe um cardinal $\alpha < \kappa$, tal que nenhum ordinal β entra α e κ é um cardinal. Um cardinal κ é um **cardinal fracamente inacessível** se for regular e não for sucessor. Um cardinal κ é um **cardinal fortemente inacessível** se for reular e, para todo cardinal $\alpha < \kappa$, vale que $2^\alpha < \kappa$ (esta última condição num cardinal diz que ele é um **cardinal limite forte**).

Teorema 6.3 Se $\kappa > \omega$ é cardinal mensurável, então κ é fortemente inacessível.

Demonstração: Temos que mostrar que κ é regular e que $2^\alpha < \kappa$, para todo cardinal $\alpha < \kappa$. Faremos uma prova combinatória e deixamos como exercício uma prova usando teoria dos modelos (veja exercício 7.4).

Primeiramente, observe-se que se U é ultrafiltro não principal e κ-completo sobre $I = \kappa$, todo $X \in U$ tem cardinalidade κ, pois se $|Y| < \kappa$, cada

$Y_i = \kappa \setminus \{i\} \in U$ e, daí, $\kappa \setminus Y = \bigcap_{i \in Y} Y_i \in U$. Assim, se $\lambda < \kappa$ e $\alpha_\eta < \kappa$, $\eta < \lambda$, então $\alpha_\eta \notin U$ e $\bigcup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta \notin U$. Assim, $\bigcup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta < \kappa$, ou seja, κ é regular.

Agora suponhamos, por via de contradição, que exista um cardinal $\lambda < \kappa$, tal que $2^\lambda \geq \kappa$ e seja $F : \kappa \to P(\lambda)$ uma função injetora, testemunhando o fato de que $2^\lambda \geq \kappa$. Podemos supor que $\varnothing$ não pertence à imagem de F.

Se U é ultrafiltro não principal e κ-completo sobre $I = \kappa$, seja $V = \{A \subseteq P(\lambda) : F^{-1}(A)) \in U\}$. Mostraremos que tal conjunto é ultrafiltro sobre $J = \lambda$ que é κ-completo (e, portanto, λ^+-completo, ou seja, principal).

De fato, sejam $A, B \in V$. Então $F^{-1}(P(A)), F^{-1}(P(B)) \in U$ e, como $F^{-1}(P(A \cap B)) = F^{-1}(P(A)) \cap F^{-1}(P(B)) \in U$, $A \cap B \in V$. Se $A \in V$ e $A \subseteq B \subseteq \lambda$, então $F^{-1}(P(B)) \supseteq F^{-1}(P(A)) \in U$, ou seja $B \in V$. Se $A \notin V$, então $F^{-1}(P(A)) \notin U$, mas então $\kappa \setminus F^{-1}(A) = F^{-1}(P(\lambda) \setminus P(A)) \in U$, ou seja $\lambda \setminus A \in V$. Portanto V é ultrafiltro. Sejam $A_\eta \in V$, $\eta < \lambda$. Então $\bigcap_{\eta<\lambda} F^{-1}(P(A_\eta)) = F^{-1}(P(\bigcap_{\eta<\lambda} A_\eta)) \in U$, ou seja, V é λ^+-completo. Como, por hipótese, F é injetora, V não é principal, pois, nesse caso, $F^{-1}(\{A\})$ será um subconjunto unitário de κ.

Vamos provar agora que um ultrafiltro κ-completo sobre $P(\lambda)$, com $\lambda < \kappa$ tem que ser principal, obtendo a contradição desejada.

Para cada $\gamma < \lambda$ sejam $S_\gamma = \{X \in P(\lambda) : \gamma \in X\}$ e $S'_\gamma = \{X \in P(\lambda) : \gamma \notin X\}$ o seu complemento. Seja $S = \{\gamma < \lambda : S_\gamma \in V\}$. Consideremos o conjunto

$$A = \bigcap_{\gamma \in S} S_\gamma \cap \bigcap_{\gamma \in \lambda \setminus S} S'_\gamma,$$

que é elemento de V, por ser ultrafiltro κ-completo. Observemos que $S \in A$, pois $S \in S_\gamma$, para todo $\gamma \in S$, e $S \in S'_\gamma$, para todo $\gamma \in \lambda \setminus S$. Seja, agora, $X \in A$. Então $X \in S_\gamma$, para todo $\gamma \in S$, ou seja, $S \subseteq X$; e $X \in S'_\gamma$, para todo $\gamma \in \lambda \setminus S$, ou seja, $\lambda \setminus S \cap X = \varnothing$, o que significa que $X = S$ e, portanto $\{S\} \in V$, ou seja, V é principal. $\square$

Na verdade, um cardinal mensurável é muito grande, no sentido do seguinte teorema.

Teorema 6.4 Se $\kappa > \omega$ é cardinal mensurável, então o conjunto dos cardinais inacessíveis menores do que κ tem cardinalidade κ.

Demonstração: Aqui usaremos o teorema de Łoś para fórmulas Σ^1_1, Teorema 5.1.

Queremos provar que, para todo $\gamma < \kappa$, existe cardinal fortemente inacessível δ, $\gamma < \delta < \kappa$. Assim, como κ é regular, o conjunto de tais δ tem cardinalidade κ.

Suponhamos, por via de contradição, que exita $\gamma < \kappa$, tal que, se δ é ordinal entre γ e κ, então não é cardinal regular ou não é limite forte. Vamos expressar esta hipótese por uma fórmula Σ^1_1.

Primeiramente, expressar que δ não é cardinal regular é dizer que exista $y < \delta$ e função $F : y \to \delta$, cuja imagem seja cofinal em δ. Considere a fórmula $\phi(x)$:

$$\exists f\, \exists y(y < x \wedge \forall z(z < x \to \exists w(w < y \wedge z < f(w))))$$

A seguir, para expressar que δ não é limite forte, precisamos expressar que existe $y < \delta$ e função injetora $F : \delta \to P(y)$. Tal função será representada por uma relação $R \subset \delta \times y$, como feito acima, ou seja, escreveremos a fórmula $\psi(x)$:

$$\exists R \exists y(y < x \wedge (\forall z\, w(R(z,w) \to w < y)) \wedge$$
$$\forall z\, w(z \neq w \to \exists v \neg(R(z,t) \leftrightarrow R(w,t))))$$

Então a fórmula $\Phi(x)$ dada por $x < c_\gamma \vee \phi \wedge \psi(x)$ é uma Σ^1_1-fórmula que expressa que $x > \gamma$ não é cardinal fortemente inacessível.

Temos que, por hipótese, $(\kappa, <, \gamma) \models \forall x \Phi$. Seja U um ultrafiltro não principal e κ-completo sobre κ e seja $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, <, \gamma) \cong (\lambda, <, \gamma)$. Pelo Teorema 5.1, $(\lambda, <, \gamma) \models \forall x \Phi$. No entanto, $\kappa < \lambda$ é fortemente inacessível e, portanto $(\lambda, <, \gamma) \models \neg\Phi(\kappa)$, uma contradição. $\square$

Existe uma caracterização de cardinais mensuráveis usando modelos, que veremos a seguir.

Teorema 6.5 As seguintes condições sobre o cardinal κ são equivalentes:

1. κ é um cardinal mensurável;

2. suponha que Γ_η seja um conjunto de $L_{\kappa\kappa}$-sentenças, $\eta < \kappa$, e que, para cada $\gamma < \kappa$, $\bigcup_{\eta<\gamma} \Gamma_\eta$ tenha um modelo; então $\bigcup_{\eta<\kappa} \Gamma_\eta$ tem modelo;
3. toda estrutura M de cardinalidade $|M| = \kappa$ tem um extensão elementar própria como $L_{\kappa\kappa}$-estruturas;

Demonstração:

1. $\Rightarrow$ 2.

Sejam $M_\gamma \models \bigcup_{\eta<\gamma} \Gamma_\eta$, $\gamma < \kappa$ e seja U um ultrafiltro não principal e κ-completo sobre κ. Pelo Teorema de Łoś 5.4, o ultraproduto $\prod_{\gamma<\kappa} M_\gamma$ é modelo de $\bigcup_{\eta<\kappa} \Gamma_\eta$.

2. $\Rightarrow$ 3.

Seja M uma L-estrutura de cardinalidade $|M| = \kappa$. estendemos a assinatura L por novas constantes $C = \{c_\eta : \eta < \kappa\}$, e expandimos M a uma $L(C)$-estrutura, interpretando as novas constantes como (todos) os elementos de M. Seja Γ_0 a $L_{\kappa\kappa}(C)$-teoria de M e sejam $\Gamma_\alpha = \Gamma \cup \{d \neq c_\eta : \eta < \alpha\}$, para todo $\alpha < \kappa$, sendo que d é um novo símbolo de constante. Observe que M pode ser expandido a um modelo de cada Γ_α, simplesmente interpretando d de modo conveniente. Por 2, existe um modelo $\overline{M}$ de $\bigcup_{\eta<\kappa} \Gamma_\eta$, que é extensão elementar de M e, $d^{\overline{M}} \notin M$.

3. $\Rightarrow$ 1.

Seja $(\lambda, <, T_S)_{S\subseteq\kappa}$ uma $L_{\kappa\kappa}$ extensão elementar de $(\kappa, <, S)_{S\subseteq\kappa}$. Seja $\delta < \lambda$, $\kappa < \delta$ um ordinal. Seja $U = \{S \subset \kappa : \delta \in T_S\}$. Como $T_S \cap T_{S'} = T_{S\cap S'}$, $S \subseteq S' \to T_S \subseteq T_{S'}$ e $T_{\kappa\setminus S} = \lambda \setminus T_S$, por ser extensão elementar, U é ultrafiltro. Como $S = \{\eta\}$ implica que $T_S = \{\eta\}$, U não é principal. Sejam $\gamma < \kappa$ e $X_\eta \in U$, $\eta < \gamma$. Queremos mostrar que $\bigcap_{\eta<\gamma} X_\eta \in U$, ou seja, que $\lambda \in T_{(\bigcap_{\eta<\gamma} X_\eta)}$. Mas isso decorre do Teorema de Łoś 5.4 para a fórmula $x \in (\bigcap_{\eta<\gamma} X_\eta) \leftrightarrow \bigvee_{\eta<\gamma}(x \in X_\eta)$. $\square$

A próxima equivalência demanda uma demonstração um pouco mais elaborada. Lembramos a seguinte construção em teoria dos conjuntos: $V_0 = \varnothing$, $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ e $V_\gamma = \bigcup_{\eta<\lambda} V_\eta$, se λ for ordinal limite. Além disso temos a função $\eta \mapsto |V_\eta| = \beth_\eta$, dada por $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ e $\beth_\lambda = \sup_{\eta<\lambda} \beth_\eta$, no caso de λ ser ordinal limite. Observe-se que, se κ é cardinal fortemente inacessível, então $\kappa = \beth_\kappa$.

Teorema 6.6 As seguintes afirmações acerca do cardinal $\kappa > \omega$ são equivalentes:

1. κ é cardinal mensurável;
2. a estrutura $\mathbb{V} = (V_\kappa, \in, S)_{S \subseteq V_\kappa}$ tem uma extensão elementar própria $\mathbb{B} = (B, E, T_S)_{S \subseteq V_\kappa}$, tal que se $a \in V_\kappa$ e $b \in B$ satisfazem $b\, E\, a$, então $b \in V_\kappa$

Demonstração:

1. $\Rightarrow$ 2.

Seja U um ultrafiltro não principal e κ-completo sobre κ e seja $\mathbb{B} = (B, E, T_S)_{S \subseteq V_\kappa}$ o ultraproduto $\prod_{\eta in \kappa} (V_\kappa, \in, S)_{S \subseteq V_\kappa}/U$. Como $\kappa \subset V_\kappa$, $(B, E,\ T_S)_{S \subseteq V_\kappa}$ é uma extensão elementar própria de $\mathbb{V} = (V_\kappa, \in, S)_{S \subseteq V_\kappa}$. Se $a \in V_\kappa$, então sua cardinalidade $|a| < \kappa$, então vale em $\mathbb{V}$ a $L_{|a|^+|a|^+}$-fórmula $\forall y \in a \bigvee_{c \in a} (x_c = y)$, com a atribuição de valores s que associa a cada variável x_c o elemento $c \in a$ correspondente. Tal fórmula também é válida em $\mathbb{B}$, pelo Teorema de Łoś 5.4. Ou seja, se $b \in B$ e $a \in V_\kappa$ são tais que $b\, E\, a$, então $b \in V_\kappa$.

2. $\Rightarrow$ 1.

Esta parte parece-se com a prova da implicação 3. $\Rightarrow$ 1. do teorema anterior. No entanto, a hipótese de que $\mathbb{B}$ é extensão elementar de $\mathbb{V}$ refere-se apenas a fórmulas de primeira ordem finitárias, impedindo que sejam usados diretamente argumentos que envolvam linguagens infinitárias. Para sobrepujar tal dificuldade, precisamos extrair algumas propriedades dessas estruturas.

O primeiro passo é provar que em $\mathbb{B}$ existe um ordinal correspondente ao cardinal κ (que não pertence a V_κ). Considere a função altura (ou *rank*, em inglês) $\rho(x) = \min\{\eta : x \in V_\eta\}$, que é representada em $\mathbb{V}$ pelo conjunto S_ρ de pares ordenados $(x, \rho(x))$. Como κ é cardinal, para cada $x \in V_\kappa$ existe $\eta < \kappa$ tal que $\eta = \rho(x)$. Seja $b \in B \setminus V_\kappa$ e seja $\bar{\eta} \in B$, tal que $(b, \bar{\eta}) \in T_{S_\rho}$. Se $\bar{\eta} < \kappa$, teríamos como consequência da hipótese sobre $\mathbb{B}$ que $b \in V_{\bar{\eta}} \subset V_\kappa$, contradizendo a suposição de que $b \notin V_\kappa$. Assim, em particular, como a imagem de ρ é κ, existem mais ordinais em B, maiores ou iguais a κ.

Agora construímos o ultrafiltro não principal $U = \{S \subset \kappa : \kappa \in T_S\}$, como na prova da implicação 3. $\Rightarrow$ 1. do teorema anterior. Para mostrarmos que esse ultrafiltro é κ-completo, não podemos lançar mão da linguagem $L_{\kappa\kappa}$, devendo aplicar outra estratégia. Assim, sejam $\gamma < \kappa$ e $X_\eta \in U$, $\eta < \gamma$. Seja S_γ o conjunto dos pares (ξ, x), tais que $x \in \bigcap_{\xi<\eta} X_\xi$, para $0 \leq \eta \leq \gamma$. Então vale em $\mathbb{V}$ que $x \in \bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$ se, e somente se, $(\gamma, x) \in S_\gamma$, e também se, e somente se, $x \in X_\xi$ para cada $\xi < \gamma$. Transferindo essas fórmulas para $\mathbb{B}$, temos que $x \in T_{(\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi)}$ se, e somente se, $(\gamma, x) \in T_{S_\gamma}$, e também se, e somente se, $x \in T_{X_\xi}$ para cada $\xi < \gamma$. Aplicando-as a $x = \kappa$, obtemos que $\kappa \in T_{(\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi)}$, ou seja, que U é κ-completo. □

Para finalizar esta parte, vamos tratar de **ultrafiltros normais**, que são ultrafiltros U não principais e κ-completos sobre $\kappa > \omega$, tais que em $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, <) \cong (\lambda, <)$, $[id]$ corresponde a κ, sendo $id : \kappa \to \kappa$ a função identidade.

Lema 6.7 Seja U um ultrafiltro não principal e κ-completo sobre κ. Então U é normal se, e somente se, para toda função $g : \kappa \to \kappa$, tal que $\{\eta : g(\eta) < \eta\} \in U$, existe $\gamma < \kappa$, tal que $\{\eta < \kappa : g(\eta) = \gamma\} \in U$.

Demonstração: Suponha, por via de contradição, que exista $g : \kappa \to \kappa$, satisfazendo $\{\eta : g(\eta) < \eta\} \in U$, mas que não exista $\gamma < \kappa$, tal que $\{\eta < \kappa : g(\eta) = \gamma\} \in U$. Então em $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, <) \cong (\lambda, <)$, $[g] < [id]$ e $[g] > j(\gamma)$, $(\gamma < \kappa)$ onde j é a inclusão de $(\kappa, <)$ em seu ultraproduto. Portanto U não pode ser normal.

Reciprocamente, se para toda função $g : \kappa \to \kappa$, tal que $\{\eta : g(\eta) < \eta\} \in U$, existe $\gamma < \kappa$, tal que $\{\eta < \kappa : g(\eta) = \gamma\} \in U$, então em $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, <) \cong (\lambda, <)$, $[g] < [id]$ implica que $[g] = j(\gamma)$, para algum $\gamma < \kappa$, ou seja, $id]$ é o κ-ésimo elemento do ultraproduto e, portanto, U é normal. □

Teorema 6.8 Se $\kappa > \omega$ é mensurável, então existe um ultrafiltro normal sobre κ.

Demonstração: Seja U um ultrafiltro não principal e κ-completo sobre κ, e seja $f : \kappa \to \kappa$, tal que a classe $[f]$ em $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, <)$ seja o κ-ésimo elemento. Seja $V = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$. Então V é ultrafiltro κ-completo e não principal sobre κ (detalhar, como exercício).

Vamos mostrar que V é normal, usando o lema anterior. Seja $g : \kappa \to \kappa$, tal que $X = \{\eta : g(\eta) < \eta\} \in V$. Seja $h = g \circ f$. Então $h(\eta) = g(f(\eta)) < f(\eta)$, para todo $\eta \in f^{-1}(X)$. Como $X \in V$, $f^{-1}(X) \in U$ e, portanto, $[h] < [f]$ em $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, <)$, o que implica que existe $\gamma < \kappa$, tal que $[h] = \gamma$, ou seja, $\{\eta < \kappa : h(\eta) = \gamma\} \in U$. Entretanto,

$$\{\eta : h(\eta) = g(f(\eta)) = \gamma\} = f^{-1}(\{\xi : g(\xi) = \gamma\},$$

do que concluímos que $f^{-1}(\{\xi : g(\xi) = \gamma\} \in U$, ou seja, que $\{\xi : g(\xi) = \gamma\} \in V$, provando que V é normal, pelo lema anterior. $\square$

Vamos apresentar duas aplicações de ultrafiltros normais.

Teorema 6.9 Seja $\kappa > \omega$ um cardinal mensurável e U um ultrafiltro normal sobre κ. Então

$$(V_{\kappa+1}, \in) \cong \prod_{\eta<\kappa}(V_{\eta+1}, \in)/U$$

e este isomorfismo tem a expressão $\pi(x) = [f]$, sendo que $f(\eta) = x \cap V_\eta \in V_{\eta+1}$, $\eta < \kappa$.

Demonstração: Denotaremos o ultraproduto $\prod_{\eta<\kappa}(V_{\eta+1}, \in)/U$ por (B, E). Temos que mostrar que a função π é bijetora e que $x \in y$ se, e somente se, $\pi(x)\, E\, \pi(y)$.

Provemos primeiramente que π é injetora. Sejam $x, y \in V_{\kappa+1}$, $x \neq y$. Então existe z em um deles mas fora do outro, digamos $z \in x$, mas $z \notin y$. Então $z \in V_\kappa$ e, como κ é também um ordinal limite, existe $\eta < \kappa$, tal que $z \in V_\eta$. Daí, segue que $z \in x \cap V_\xi$ e $z \notin y \cap V_\xi$, para todo ξ, $\eta \leq \xi < \kappa$ e, dado que U é não principal e κ completo, o conjunto $\{\xi : z = z \cap V_\xi$, $z \in x \cap V_\xi$, mas $z \notin y \cap V_\xi\} \in U$. Assim, vale em (B, E) que $\pi(z) \in \pi(x)$ e que $\pi(z) \notin \pi(y)$. Como vale o axioma da extensionalidade em $(V_{\kappa+1}, \in)$, também vale em (B, E) e, portanto $\pi(x) \neq \pi(y)$.

A seguir, provaremos que se $x \in y$, então $\pi(x)\, E\, \pi(y)$. Supondo que $x \in y \in V_{\kappa+1}$, temos que $x \in V_\kappa$ e, portanto, existe $\gamma < \kappa$, tal que $x \in V_\gamma$. Daí, segue que, para todo η, $\gamma \leq \eta < \kappa$, $x = x \cap V_\eta$ e $x \in y \cap V_\eta$, do que decorre a relação $\pi(x)\, E\, \pi(y)$ em (B, E).

Por fim, provaremos que π é sobrejetora. Seja $[f] \in B$. Obteremos $x \in V_{\kappa+1}$, tal que $\pi(x) = [f]$.

Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que $[f]\,E\,[h]$, para alguma $[h] \in B$. Como, neste caso, $\{\eta : f(\eta) \in h(\eta) \in V_{\eta+1}\} \in U$, podemos supor, então, que $X = \{\eta < \kappa : f(\eta) \in V_\eta\} \in U$, e definamos $g(\eta) = \min\{\gamma : f(\eta) \in V_{\gamma+1}\}$. Tal função satisfaz $g(\eta) < \eta$, se $\eta \in X$, porque se η é ordinal limite, então $f(\eta) \in V_\gamma \subset V_{\gamma+1}$, para algum $\gamma < \eta$ e se $\eta = \xi + 1$, então $g(\eta) \leq \xi < \eta$. Usando o fato de que U é normal, concluímos que existe $\gamma < \kappa$, tal que $Y = \{\eta : g(\eta) = \gamma\} \in U$. Vamos particionar o ordinal κ em várias classes, sendo que uma delas é $\kappa \setminus Y$. Resta prticionar a parte contida em Y, definindo para cada $u \in V_\gamma$ o conjunto $Y_u = \{\eta : f(\eta) = u\}$. Como κ é também um cardinal fortemente inacessível e $\gamma < \kappa$, existem no maáximo $\beth_\gamma < \beth\kappa = \kappa$ classes desta partição e, devido ao fato que U é κ completo, uma dessas classes deve pertencer a u. Dado que $Y \in U$, para um $u \in V_\gamma$, $Y_u \in U$. Observe-se que se $\gamma < \xi < \kappa$, $u \cap V_\xi = u$, o que implica $\{\eta : f(\eta) = u \cap V_\eta\} \in U$, ou seja, $\pi(u) = [f]$.

Note-se que a argumentação acima aplicada às funcões f eventualmente constantes demonstra que se $\pi(x)\,E\,\pi(y)$, então $x \in y$.

Para finalizar, falta considerar o caso de uma $[f] \in B$ arbitrária. Para isso, considere o conjunto $x = \{y \in V_\kappa : \pi(y)\,E\,[f]\}$. Então $x \in V_{\kappa+1}$ e mostraremos que $\pi(x) = [f]$, usando o axioma da extensionalidade, que vale em ambas as estruturas. Seja $[h] \in B$. Se $[h]\,E\,[f]$, então, pelo primeiro caso considerado, vale que $[h]\pi(u)$, para algum $u \in V_\kappa$, e disso segue que $u \in x$ e $\pi(u)\,E\,\pi(x)$. Reciprocamente, suponhamos que $[h]\,E\,\pi(x)$ e, novamente usando o argumento anterior, seja $u \in V_\kappa$, tal que $[h] = \pi(u)$. Mas daí decorre que $\pi(u)\,E\,\pi(x)$ e, portanto, $u \in x$, pela observação logo acima. Desta forma fica provado que $\pi(x) = [f]$, ou seja, que π é também sobrejetora. $\square$

Como consequência imediata deste teorema, obtemos o seguinte.

Teorema 6.10 Seja $\kappa > \omega$ um cardinal mensurável e U um ultrafiltro normal sobre κ. Dada uma fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ e elementos $S_1, \ldots, S_n \in V_{\kappa+1}$, temos que

$$(V_{\kappa+1}, \in) \models \phi(S_1, \ldots, S_n)$$

se, e somente se,

$$\{\eta < \kappa : (V_{\eta+1}, \in) \models \phi(S_1 \cap V_\eta, \ldots, S_n \cap V_\eta)\} \in U.$$

Em particular,se ϕ for uma sentença, $(V_{\kappa+1}, \in) \models \phi$ se, e somente se, $\{\eta < \kappa : (V_{\eta+1}, \in) \models \phi\} \in U$. $\square$

Com isto, obtemos a seguinte propriedade dos ultrafiltros normais sobre um cardinal mensurável. (Veja abaixo o exercício 7.6 para mais uma propriedade.)

Teorema 6.11 Seja $\kappa > \omega$ um cardinal mensurável e U um ultrafiltro normal sobre κ. Então $\{\gamma < \kappa : \gamma \text{ é fortemente inacessível}\} \in U$.

Demonstração: Basta formalizar a propriedade de um cardinal ser fortemente inacessível e usar os dois teoremas anteriores. $\square$

7 Mais exercícios

Exercício 7.1 Mostre que toda fórmula de segunda ordem ϕ é logicamente equivalente a uma fórmula $QX\psi$, em que ψ é sem quantificadores e QX é uma seqüência de quantificadores de segunda ordem seguida de uma seqüência de quantificadores de primeira ordem.

Exercício 7.2 Mostre que não se ganha nada se fizermos $L_{\alpha\beta}$ com $\beta > \alpha$.

Exercício 7.3 Se a L-estrutura M tem cardinalidade $|M| = \alpha < \kappa$ infinita e U é ultrafiltro não principal e κ-completo sobre $I = \kappa$, então $\prod_{\eta<\kappa} M/U$ é isomorfa a M.

Exercício 7.4 O objetivo deste exercício é novamente demonstrar que um cardinal mensurável é fortemente inacessível, mas agora usando ultraprodutos. Seja $\kappa > \omega$ um cardinal mensurável e U um ultrafiltro não principal e κ-completo sobre κ, e seja L a assinatura contendo a ordem estrita $<$ e símbolos de constantes c_η, $\eta < \kappa$. Seja λ o ordinal correspondente ao ultraproduto $\prod_{\eta<\kappa} \kappa/U$. Observe que já provamos que κ é incluído canonicamente como um segmento inicial de λ.

1. Para provar que κ é regular, suponha que não seja, e considere $F \subset \beta\times\kappa$ uma relação em κ que represente o gráfico de uma função $\beta \mapsto \kappa$ cuja imagem seja cofinal em κ (ou seja, o supremo da imagem é todo κ). Considere o ultraproduto $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, F)/U \cong (\lambda, G)$. Use o Teorema de Łoś para as fórmulas $\exists x\,\forall y(y < c_\eta \to F(y) < x)$ $(\eta < \kappa)$ e $\forall x\,\exists y(y < c_\eta \wedge x < F(y))$ e chegue a uma contradição.

2. Para provar que $2^\alpha < \kappa$, para todo $\alpha < \kappa$, suponha que exista $\gamma < \kappa$, tal que $2^\gamma \geq \kappa$ e seja $F : \kappa \to P(\gamma)$ uma função injetora, e seja $R \subset \kappa \times \gamma$ representando F da seguinte maneira: $R(\eta, \delta)$ se, e só se, $\delta \in F(\eta)$. Forme o ultraproduto $\prod_{\eta<\kappa}(\kappa, R)/U \cong (\lambda, S)$. Considere as fórmulas $\forall xy(R(x, y) \to y < c_\eta)$ $(\eta < \kappa)$ e $\forall xy[x \neq y \to \exists z\neg(R(x, z) \leftrightarrow R(y, z))]$; o conjunto $X = \{\delta < \gamma : S(\kappa, \delta)\}$ e a $L_{\gamma\gamma}$-fórmula $\exists x\,\forall y(R(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{\delta\in X}(y = c_\delta))$.

Exercício 7.5 Mostre que se κ é um cardinal mensurável, então existe um ultrafiltro κ-completo sobre cada cardinal $\lambda \geq \kappa$.

Exercício 7.6 (Cardinais Fracamente Compactos) Um cardinal $\kappa > \omega$ é um cardinal fracamente compacto se vale a seguinte propriedade para $L_{\kappa\kappa}$: Se Γ é um conjunto de $L_{\kappa\kappa}$-sentenças de cardinalidade $|\Gamma| = \kappa$, tal que cada $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ de cardinalidade $|\Gamma_0| < \kappa$ tem modelo, então todo Γ tem um modelo.

Prove que se κ é mensurável, então é também fracamente compacto.

Exercício 7.7 Uma relação binária T num conjunto X é chamada de **árvore** se T é transitiva, bem fundada (ou seja, não existe sequência infinita $x_n \in X$, tal que $x_{n+1}Tx_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$), dirigida (isto é, se yTx e zTx, entaão ou yTz, ou zTy, ou ainda $y = z$) e possui um elemento r mínimo (a **raiz** da árvore), ou seja rTx, para todo $x \in X$.

1. Prove que, dado $x \in X$, o conjunto $\{y \in X : yTx\}$ é bem ordenado.

2. Um **ramo** da árvore T é um subconjunto $R \subseteq X$, tal que se $x \in R$ e yTx, então $y \in R$. Mostre que um ramo é um conjunto bem ordenado por T.

3. Seja $o(R)$ o ordinal correspondente ao ramo R da árvore T, e seja $o(T)$, a **ordem de** T, o supremo dos ordinais correspondentes a todos

os ramos de T. Dizemos que um cardinal κ tem a **propriedade da ramificação** (ou mesmo, a **propriedade de árvore**) se, e somente se,

> para toda árvore T em κ de ordem $o(T) = \kappa$, tal que, para cada ordinal $\eta < \kappa$, vale que $|\{R : o(R) = \eta\}| < \kappa$, existe ramo R em T tal que $o(R) = \kappa$.

Prove que o cardinal fortemente inacessível κ é fracamente compacto se, e somente se, possuir a propriedade da ramificação.

4. Suponha que $\kappa > \omega$ seja um cardinal mensurável e que U seja um ultrafiltro normal sobre κ. Mostre que o conjunto $\{\gamma < \kappa : \gamma$ é um cardinal fracamente compacto$\} \in U$.

Exercício 7.8 (Cardinais Fortemente Compactos) Um cardinal $\kappa > \omega$ é um cardinal fortemente compacto se vale a seguinte propriedade para $L_{\kappa\kappa}$: Se Γ é um conjunto de $L_{\kappa\kappa}$-sentenças, tal que cada $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, cuja cardinalidade $|\Gamma_0| < \kappa$, tem modelo, então todo Γ tem um modelo.

1. Prove que se κ é fortemente compacto, então κ é mensurável.

2. Um ultrafiltro U sobre $I = P_\kappa(\lambda) = \{X \subset \lambda : |X| < \kappa\}$ ($\kappa \leq \lambda$ cardinais) é chamado de **ultrafiltro fino** se for não principal, κ-completo e, para todo $\alpha < \lambda$, o conjunto $\{X \subset \lambda : \alpha \in X\} \in U$. Mostre que κ é supercompacto se, e somente se, existe um ultrafiltro fino sobre $P_\kappa(\lambda)$, para todo cardinal $\lambda \geq \kappa$.

3. Prove que κ é um cardinal fotemente compacto se, e somente se, para todo conjunto não vazio I, todo filtro sobre I que seja κ completo pode ser estendido a um ultrafiltro κ completo.

Exercício 7.9 (Cardinais Supercompactos) Um ultrafiltro U sobre $P_\kappa(\lambda)$ é **normal** se for não principal, κ-completo, para todo $\alpha < \lambda$, o conjunto $\{X \subset \lambda : \alpha \in X\} \in U$, e para todo $X \in U$ e toda $f : X \to \lambda$, se $\{x \in X : f(x) \in x\} \in U$, então para algum $\alpha < \lambda$ vale que $\{x : f(x) = \alpha\} \in U$. Um cardinal κ é um **cardinal supercompacto** se para todo cardinal $\lambda \geq \kappa$, existe um ultrafiltro normal sobre $P_\kappa(\lambda)$.

1. Mostre que se U é um ultrafiltro normal sobre $P_\kappa(\lambda)$, então dada a inclusão elementar $j : (V_{\lambda+1}, \in) \to (B, E)$, $(B, E) = \prod_{a \in P_\kappa(\lambda)}(V_{\lambda+1}, \in)/U$, então $j(\kappa) > \lambda$ em (B, E) (identificando os ordinais no sentido de (B, E) com os ordinais usuais) e que toda λ-sequência de elementos de B pertencem a B.

2. Mostre que κ é um cardinal supercompacto se, e somente se, para todo cardinal $\lambda \geq \kappa$ existe extensão elementar $j : (V_{\kappa+1}, \in) \to (B, E)$, tal que $j(\kappa) > \lambda$ em (B, E) (identificando os ordinais no sentido de (B, E) com os ordinais usuais) e que toda κ-sequência de elementos de B pertencem a B. [Sugestão: para obter U de (B, E), seja $U = \{X \in P_{kappa}(\lambda) : \kappa \in j(X)\}$.]

Índice Remissivo

$L_{\alpha\beta}$, 11
$M \models \varphi[s]$, 9
$P_\kappa(\lambda)$, 24
V_α, 17
Δ^0_n, 10
Δ^1_n, 10
Π^0_n, 10
Π^1_n, 10
Σ^0_n, 10
Σ^1_n, 10
$\beth_\alpha$, 17
$t^M[s]$, 8
    $s(t)$, 8
árvore, 23
    ordem, 23
    raiz, 23
    ramo, 23

atômica
    fórmula, 8

boa ordem, 13

cardinal
    compacto
        fortemente, 24
        fracamente, 23
    inacessível
        fortemente, 14
        fracamente, 14
    limite
        forte, 14
        fraco, 14
    mensurável, 13
    regular, 14
    sucessor, 14
    supercompacto, 24
complexidade
    fórmula, 8
    termo, 7
conjunto
    bem ordenado, 6
    bem ordenado, 13

estrutura
    satisfação
        segunda ordem, 8

fórmula, 7
    atômica, 8
    complexidade, 8
    positiva, 4
    segunda ordem
        logicamente equivalentes, 10
filtro
    ω-completo, 6
    de Fréchet, 5
função
    rank, 18
    altura, 18

interpretação
    fórmulas
        $M \models \varphi[s]$, 9
    termos, 8
        $s(t)$, 8
        $t^M[s]$, 8

linguagem
    $L_{\alpha\beta}$, 11
    fórmula, 7
    símbolos lógicos, 7

infinitária, 11
segunda ordem, 7
termo, 7

modelo
de φ, 9

ordem
boa ordem, 13
parcial
bem fundada, 13
ordinais, 13

pif, 2
produto reduzido, 3
propriedade
da intersecção finita, 2
da ramificação, 24
de árvore, 24

satisfação
segunda ordem, 8

Teorema
Łoś, 4
fórmulas positivas, 4
para Σ^1_1-fórmulas, 10
para $L_{\alpha\beta}$, 12
Compacidade, 5
termo
complexidade, 7
definição, 7
interpretação, 8
$s(t)$, 8
$t^M[s]$, 8

ultrafiltro
κ-completo, 11
κ-incompleto, 11
fino, 24
normal, 19
sobre $P_\kappa(\lambda)$, 24
principal, 5
ultraproduto, 3
de ordinais, 13