# Teoria dos Modelos: Lista 1 - Com correções

Ricardo Bianconi

Entregar até o dia 5 de maio de 2009

> **Critério de correção dos exercícios abaixo:** Existem 16 pontos em exercícios. Quem entregar uma quantidade de exercícios somando mais de 10 pontos possíveis, escolherei os melhores para a correção (cuja soma de pontos seja $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$, ou $10 = 2 + 2 + 3 + 3$, ou $11 = 2 + 2 + 2 + 3$; assim, por exemplo, se forem entregues todos, mas cada um só tiver obtido metade dos pontos, a nota será $6 = 1 + 1 + 1 + 1,5 + 1,5$).

Lembremos que um $n$-tipo (ou simplesmente tipo) é um conjunto maximal consistente $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ de $L$-fórmulas, cujas variáveis livres (se houver) estão contidas no conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, para $n \geq 0$ (no caso $n = 0$, não há fórmulas com variáveis livres, mas apenas sentenças). Sejam $S_n(L)$ os conjuntos do todos os $n$-tipos de $L$-fórmulas, $n \geq 0$. Se a assinatura for conhecida no contexto em que usamos $S_n(L)$, poderemos omiti-la da notação, escrevendo apenas $S_n$ . Se $T$ é conjunto consistente de $L$-sentenças, denotaremos $S_n(T) = \{\Gamma \in S_n(L) : T \subseteq \Gamma\}$.

Listaremos alguns fatos úteis para a resolução desta lista e que podem ser assumidos verdadeiros.

Para cada $n \geq 0$ e cada $\phi$, com $VL(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, sejam $U_\phi = \{\Gamma \in S_n(L) : \phi \in \Gamma$. Estes conjuntos formam uma base de uma topologia de $S_n(L)$ totalmente desconexa e compacta, ou seja:

- o conjunto de tais $U_\phi$ é fechado por uniões e interseções finitas e também por complementos; como o complemento de um aberto é fechado, tais conjuntos são, ao mesmo tempo, abertos e fechados;
- os conjuntos abertos de $S_n(L)$ são as uniões arbitrárias desses conjuntos; a topologia de $S_n(L)$ é o conjunto $\tau$ de todos os conjuntos abertos;

- essa topologia é Hausdorff, ou seja, dados $\Gamma_1, \Gamma_2 \in S_n(L)$ distintos, existem $U, V \in \tau$ disjuntos, tais que $\Gamma_1 \in U$ e $\Gamma_2 \in V$;
- essa topologia é compacta, ou seja, se $F_i$, $i \in I$, for uma família de conjuntos fechados (complementos de abertos) em $S_n(L)$, tal que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, então existe $I_0 \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{i\in I_0} F_i = \varnothing$;

**Exercício 1** O objetivo deste exercício é provar esta versão mais geral do

> **Teorema da Omissão de Tipos:** Suponha que a assinatura $L$ é finita ou (infinita) enumerável. Dado conjunto consistente de sentenças (não necessariamente maximal) $T$ e dados $\Gamma_j \in S_{n_j}(T)$ tipos não isolados $j \in \mathbb{N}$, existe $M \models T$ que omite todos esses tipos.

Para isto, resolva os itens a seguir. No que se segue, $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ e $D_n = \{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\}$, conjunto de novas constantes a serem juntadas à assinatura $L$, obtendo-se a assinatura $L(D) = L \cup D$ (com $D \cap L = \varnothing$). Sejam $C_n = \bigcup_{j\leq n} D_j$, $j \in \mathbb{N}$. Sejam $\Phi_n = \{\phi_{m,n} : m \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\Phi_{-1} = \{\phi_{m,-1} : m \in \mathbb{N}\}$ enumerações das $L(C_n)$-fórmulas, respectivamente $L$-fórmulas, com uma única variável livre $x$ e seja $\Xi = \{(\exists x\, \phi_{m,n} \to \phi_{m,n}|_{x=a_{m+1,n}}) : m \in \mathbb{N}, n \geq -1\}$. Uma **enumeração de Henkin** (de $L(D)$-sentenças) é um conjunto maximal consistente de $L(D)$-sentenças $X \supset \Xi$. Seja $H(T)$ o conjunto de todas as enumerações de Henkin (contendo $T$), como descritas acima.

1. **(2,0 pontos)** Mostre que $H(T)$ é subconjunto fechado e não vazio de $S_0^{L(D)}(T)$ (o conjunto de todas as $\Gamma \in S_0(L(D))$ maximais consistentes).
2. **(2,0 pontos)** Mostre que se $\Gamma \in S_n^L(T)$ é um tipo não isolado, então, para cada $n$-upla $\bar{a} \in D^n$, $F(\Gamma) = H(T) \cap \bigcap_{\phi\in\Gamma} U_{\phi|_{\bar{x}=\bar{a}}}$ é um fechado de $H(T)$ de interior vazio (ou seja, não existe nenhuma $L(D)$-sentença $\psi$, tal que $U_\psi \subseteq F$).
3. **(2,0 pontos)** Usando o fato de que todo espaço compacto tem a propriedade de Baire (ou seja, união enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio), mostre que dados tipos $\Gamma_j \in S_{n_j}^L(T)$, $j \in \mathbb{N}$, não isolados, então existe $\Delta \in H(T) \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{\bar{a}\in D^{n_j}} \bigcap_{\phi\in\Gamma_j} U_{\phi|_{\bar{x}=\bar{a}}}$
4. **(2,0 pontos)** Mostre que o modelo obtido pelo método das constantes correspondente a $\Delta$ omite cada tipo $\Gamma_j$, $j \in \mathbb{N}$.

O próximo exercício trata das cardinalidades dos espaços $S_n(T)$:

**Exercício 2** Dado conjunto maximal consistente $T$ de $L$-sentenças, $L$ finita ou enumerável e seja $S(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n(T)$ (observe que $S_0(T) = \{T\}$).

1. **(3,0 pontos)** Mostre que se $S(T)$ é enumerável então os tipos isolados de cada $S_n(T)$ são densos em $S_n(T)$, $n \geq 1$, ou seja, para cada $\phi$ existe um tipo isolado em $U_\phi$. [Observe-se que, por serem espaços compactos, cada $S_n(T)$ só pode ter no máximo uma quantidade enumerável de tipos isolados. Mostre que se os tipos isolados não são densos em algum $S_n(T)$, então existem $2^{\aleph_0}$ tipos não isolados: para isto, construa uma árvore binária de abertos $U_\phi$, indexando as $\phi$ com seqüências binárias finitas, começando co uma $\phi_\varnothing$, tal que $U_{\phi_\varnothing}$ não contenha nenhum tipo isolado e mostre que existe $\phi_{\langle 0\rangle}$ tal que, se $\phi_{\langle 1\rangle}$ for a fórmula $\neg\phi_{\langle 0\rangle}$, então $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 0\rangle}} \subset U_\varnothing$ e $\varnothing \neq U_{\phi_{\langle 1\rangle}} \subset U_\varnothing$, etc.]

2. **(3,0 pontos)** Seja $L = \{<, c_r\}_{r\in\mathbb{Q}}$ uma assinatura e $T$ a $L$-teoria do conjunto dos números racionais visto como um conjunto ordenado (estritamente) por $<$ e com cada símbolo de constante $c_r$ interpretado pelo elemento $r \in \mathbb{Q}$. **É dado que $T$ admite eliminação de quantificadores**, ou seja, para cada fórmula $\phi$, existe uma fórmula $\psi$ sem quantificadores e com as mesmas variáveis livres que $\phi$, tal que $T \vdash \phi \leftrightarrow \psi$. Mostre que os 1-tipos isolados são densos em $S_1(T)$, e que a cardinalidade de $S_1(T)$ é $|S_1(T)| = 2^{\aleph_0}$.

3. **(2,0 pontos)** Mostre que se $S(T)$ é enumerável e $M \models T$ é modelos enumerável, então dado $A \subseteq M$, $S^{L(A)}(T_{L(A)}(M))$ também é enumerável, sendo que $T_{L(A)}(M)$ é a $L(A)$-teoria de $M$, ou seja, o conjunto de todas as $L(A)$-sentenças verdadeiras em $M$.