Teoria dos Modelos: Cadeias Elementares

Ricardo Bianconi

Sumário

1 Introdução: Subestruturas Elementares

Lembremos os seguintes conceitos: um **morfismo** de $\mathcal{L}$-estruturas é uma aplicação $\Phi : M \to N$ tal que se $c \in C$, $\Phi(c^m) = c^N$, se $f \in F$ é n-ária, $\Phi(f^M(x_1, \ldots, x_n)) = f^N(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n))$, e se $P \in R$ é n-ária, então $(x_1, \ldots, x_n) \in P^M$ se, e só se, $(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)) \in P^N$. Se Φ é bijetora, dizemos que é um **isomorfismo** (de L-estruturas). Um **morfismo elementar** $f : A \to B$ é um morfismo de L-estruturas tal que, para toda fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, e todo $\bar{a} \in A^n$ vale

$$A \models \psi(\bar{a}) \iff B \models \psi(f^n(\bar{a})),$$

sendo que $f^n : A^n \to B^n$ é o produto cartesiano de n cópias de f.

Aplicando essa definição à fórmula $\neg(x = y)$, vemos que um morfismo elementar é injetor.

Dados $A \subseteq B$, tais que $A, B \models T$, dizemos que A é subestrutura elementar de B, (e também dizemos que B é extensão elementar de A se para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ e todo $\bar{a} \in A^n$, $A \models \phi(\bar{a})$ se, e só se, $B \models \phi(\bar{a})$. Denotamos tal fato por $A \preceq B$.

Teorema 1.1 (Teste de Vaught) Dados $A \subseteq B$, tais que $A, B \models T$, então $A \preceq B$ se, e só se, se para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, da forma $\exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(x_1, \ldots, x_n)$ e todo $\bar{a} \in A^n$, se $B \models \phi(\bar{a})$, então $A \models \phi(\bar{a})$.

Demonstração:

Se $A \preceq B$, de própria definição concluímos que para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots,$ $x_n)$, da forma $\exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(x_1, \ldots, x_n)$ e todo $\bar{a} \in A^n$, se $B \models \phi(\bar{a})$, então $A \models \phi(\bar{a})$.

Para provarmos a recíproca, suponhamos que, para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots,$ $x_n)$, da forma $\exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(x_1, \ldots, x_n)$ e todo $\bar{a} \in A^n$, se $B \models \phi(\bar{a})$, então $A \models \phi(\bar{a})$. Seja $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula, $\bar{a} \in A^n$ e suponha que $B \models \theta(\bar{a})$. Se θ for logicamente equivalente a uma do tipo da hipótese, nada precisamos provar. Assim, assumiremos que θ é (logicamente equivalente a uma fórmula da forma) $\forall y_1 \ldots \forall y_m \psi(x_1, \ldots, x_n)$. Se A não satisfizesse θ em $\bar{a}$, então sua negação seria verdadeira em A. Mas sua negação é logicamente equivalente à fórmula $\exists y_1 \ldots \exists y_m \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$ e a hipótese aplicada a ela daria uma contradição, provando o teorema. $\square$

Para aplicações a seguir, considere uma L-estrutura A e seja $L(A)$ a assinatura L unida com um conjunto (disjunto de L) de novos símbol;os de constantes $\{c_a : a \in A\}$. O diagrama de A é o conjunto Δ_A de todas as sentenças que são fórmulas atômicas ou negações de fórmulas atômicas satisfeitas na $L(A)$-estrutura $(A, a)_{a \in A}$ (isto é, interpretando cada constante c_a pelo respectivo elemento $a \in A$). O diagrama elementar de A é a $L(A)$-teoria da estrutura $(A, a)_{a \in A}$.

Teorema 1.2 Sejam $A \equiv B$ L-estruturas. Então existe extensão elementar C de B e um morfismo elementar $A \mapsto C$.

Demonstração: Sejam Δ_A o diagrama de A e Γ_B o diagrama elementar de B.

Afirmamos que $\Delta_A \cup \Gamma_B$ é consistente. De fato, pelo Teorema da Compacidade, basta verificar que cada parte finita dessa união tem um modelo. Seja $\Xi \subset \Delta_A$ finito. Mostraremos que $\Xi \cup \Gamma_B$ tem modelo. Seja $\varphi(\bar{c}_a)$ a conjunção das fórmulas contidas em Δ_A, sendo que $\bar{c}_a = (c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ são os símbolos de constantes correspondentes aos elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Trocando essas constantes por variáveis $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, que não ocorram em φ, temos que $A \models \exists \bar{z}\, \varphi(\bar{z})$ e, portanto, $B \models \exists \bar{z}\, \varphi(\bar{z})$. Sejam $b_1, \ldots, b_n \in B$, tal que $B \models \varphi(\bar{b})$. Interpretando em $(B, b)_{b \in B}$ o símbolo de constante c_{a_i} pelo elemento $b_i \in B$, expandimos a estrutura $(B, b)_{b \in B}$ a uma $L(B) \cup \{c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}\}$-estrutura que satisfaz o conjunto de fórmulas $\Xi \cup \Gamma_B$, como queríamos.

Seja $C \models \Delta_A \cup \Gamma_B$. Naturalmente podemos tomar C como extensão elementar de B e a interpretação das constantes c_a, $a \in A$, forma um subconjunto de C que se comporta como cópia isomorfa da estrutura A. $\square$

2 Cadeias Elementares

Uma cadeia de L-estruturas é uma seqüência de estruturas A_n, $n \in \mathbb{N}$, tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, e se R é símbolo de relação N-ária, então $R^{A_n} = R^{A_{n+1}} \cap {A_n}^N$, e também, se f é símbolo de função N-ária, f^{A_n} é a restrição à estrutura A_n de sua interpretação $f^{A_{n+1}}$; por fim, as constantes têm a mesma interpretação em todas as estruturas (e, portanto, nomeiam elementos de A_0). Uma cadeia $(A_n : n \in \mathbb{N})$ é elementar se também valer que $A_n \preceq A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Se $(A_n : n \in \mathbb{N})$ é cadeia de L-estruturas, então $A \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ pode tornar-se naturalmente numa L-estrutura, interpretando o é símbolo de relação N-ária $R^A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{A_n}$; o símbolo de função N-ária F terá a interpretação f^A, de modo que se $\bar{a} \in {A_n}^N \subseteq A^N$, então $f^A(\bar{a}) = f^{A_n}(\bar{a})$; por fim, se c é um símbolo de constante, $c^A = c^{A_0}$.

Teorema 2.1 (Tarski) Seja $(A_n : n \in \mathbb{N})$ uma cadeia elementar. Então a união dessa cadeia (a estrutura $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, descrita logo acima) é uma extensão elementar de cada A_n.

Demonstração: Por indução na complexidade das fórmulas. A base da indução consiste das fórmulas atômicas, o que é imediato, lembrando que cada A_i é subestrutura de A. Os passos de indução para os conectivos proposicionais $(\vee, \wedge, \rightarrow, \neg)$ são imediatos. O caso da quantificação pode ser restrito ao quantificador existencial $(\exists)$, que decorre do Teste de Vaught. $\square$

Como primeira aplicação, vamos provar o Teorema da Consistência Conjunta de A. Robinson.

Teorema 2.2 (Teorema da Consistência Conjunta de Robinson) Sejam L_1 e L_2 duas assinaturas e $L = L_1 \cap L_2$. Suponha que T seja uma L-teoria completa (isto é, maximal consistente) e que $T_j \supseteq T$, $j = 1, 2$, sejam L_j-teorias consistentes (não necessariamente maximais). Então $T_1 \cup T_2$ é uma $(L_1 \cup L_2)$-teoria consistente.

Demonstração: Sejam $A_0 \models T_1$ e $B_0 \models T_2$, nas respectivas assinaturas L_1 e L_2. Pela hipótese de $T = T_1\restriction_L = T_2\restriction_L$ e T ser completa, temos que $A_0 \equiv_L B_0$.

Sejam $A_1 \succ_{L_1} A_0$ contendo cópia de B_0 (como L-estrutura) e $B_1 \succ_{L_2} B_0$ contendo cópia de A_1 (novamente como L-estrutura). Podemos fazer essas construções usando o Teorema 1.2. Indutivamente construímos, da mesma maneira, extenssões $A_{n+1} \succ_{L_1} A_n$, $B_{n+1} \succ_{L_2} B_n$ com inclusões elementares (de L-estruturas) $f_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ e $g_n : B_n \to A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, obtendo duas seqüências:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & A_{n-1} & \stackrel{\prec_{L_1}}{\longrightarrow} & A_n & \stackrel{\prec_{L_1}}{\longrightarrow} & A_{n+1} & \dots \\
 & \downarrow_{f_{n-1}} & {}^{g_{n-1}}\nearrow & \downarrow_{f_n} & {}^{g_n}\nearrow & \downarrow_{f_{n+1}} & \\
\dots & B_{n-1} & \stackrel{\prec_{L_2}}{\longrightarrow} & B_n & \stackrel{\prec_{L_2}}{\longrightarrow} & B_{n+1} & \dots
\end{array}$$

Tomando-se as uniões das duas cadeias elementares obtemos modelos A e B, que são isomorfos como L-estruturas. Usando tal isomorfismo, podemos transferir interpretações dos símbolos de L_2 em A, obtendo-se, assim, uma $(L_1 \cup L_2)$-estrutura que é modelo de $T_1 \cup T_2$. $\square$

3 Aplicações: Resultados de Preservação

Dizemos que uma L-teoria T é axiomatizada pelo conjunto de axiomas Γ se $T \models \Gamma$ e $\Gamma \models T$. Isto é equivalente a dizer que, para toda fórmula φ, $T \models \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \models \varphi$.

Uma fórmula ϕ é dita Δ_0^0 (ou Σ_0^0, ou Π_0^0) se for logicamente equivalente a uma fórmula sem quantificadores. Se ϕ for Π_n^0 (ou Σ_n^0), então $\exists z_1, \dots, z_n\, \phi$ (ou $\forall z_1, \dots, z_n\, \phi$, respectivamente) é Σ_{n+1}^0 (ou Π_{n+1}^0, respectivamente. Se uma fórmula ϕ for, ao mesmo tempo, equivalente a uma fórmula Pi^0_n e a outra Σ^0_n, então ϕ também será Δ^0_n. O superíndice 0indica que estamos falando do nível menos complexo de ordens de lógicas, a lógica de primeira ordem (e as lógicas de ordem N terão superíndices $N+1$, por convenção).

Os dois teoremas de preservação a seguir expostos têm uso em aplicações de Teoria de Modelos, principalmente no estudo de sistemas algébricos.

Mas comecemos com um lema auxiliar.

Lema 3.1 Seja T um L-teoria (consistente) e seja Δ um conjunto de sentenças que seja fechado por disjunções finitas. Então são equivalentes:

1. T tem um conjunto de axiomas $\Gamma \subset \Delta$;
2. se $A \models T$ e B é uma L-estrutura, tal que, para toda $\delta \in \Delta$, se $A \models \delta$, então $B \models \delta$, então $B \models T$.

Demonstração: A implicação (1) $\Rightarrow$ (2) é imediata.

Para a recíproca ((2) $\Rightarrow$ (1)), definamos $\Gamma = \{\delta \in \Delta : T \models \delta\}$. Dessa definição decorre que $T \models \Gamma$.

Precisamos mostrar que $\Gamma \models T$. Seja $B \models \Gamma$ e consideremos o conjunto de sentenças $\Sigma = \{\neg\delta : \delta \in \Delta, \text{ e } B \models \neg\delta\}$. Mostremos que $T \cup \Sigma$ é um conjunto consistente de sentenças. Suponha que, argumentando por contradição, tal conjunto fosse inconsistente. Por Compacidade, existiriam $n \geq 1$ e $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$, tais que $\neg\delta_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$, e $T \cup \{\neg\delta_1, \ldots, \neg\delta_n\}$ seria inconsistente. Ou, seja, $T \models \neg(\bigwedge_{i=1}^n \neg\delta_i)$, o que é o mesmo que $T \models (\bigvee_{i=1}^n \delta_i)$. Usando a hipótese de Δ ser fechedo por disjunções finitas e também a definição do conjunto Γ, teríamos que $\bigvee_{i=1}^n \delta_i \in \Delta$ e, por conseguinte, $\bigvee_{i=1}^n \delta_i \in \Gamma$, implicando que $B \models \bigvee_{i=1}^n \delta_i$, uma contradição, se levarmos em conta a definição de Σ.

Seja, então $A \models T \cup \Sigma$. Observemos que se $\delta \in \Delta$ é tal que $A \models \delta$, então $B \models \delta$, porque senão haveríamos $(\neg\delta) \in \Sigma$, o que não poderá ocorrer, pois $A \models \Sigma$. Usando a asserção (2) do Lema, concluímos que $B \models T$ e, como $B \models \Gamma$ era arbitrário, concluímos que $\Gamma \models T$. $\square$

Teorema 3.1 A L-teoria T é preservada por uniões de cadeias (não elementares) se, e somente se, puder ser axiomatizada por um conjunto de Π^0_2 sentenças.

Demonstração: Suponhmos, primeiramente, que T seja axiomatizada por um conjunto Γ de fórmulas Π_2^0. Seja $\langle A_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ uma cadeia de modelos de T (ou seja, $A_\alpha \subseteq A_\gamma$, se $\alpha < \gamma$). Seja $A = \bigcup A_\alpha$ a L -estrutura que é a união da cadeia. Mostremos que $A \models \Gamma$ e, portanto, $A \models T$.

Consideremos uma sentença $\gamma = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \Gamma$, sendo que ψ não tenha quantificadores.Seja $\bar{a} \in A^n$. Então existe $\alpha < \beta$, tal que $\bar{a} \in A_\alpha^n$. Como, por hipótese, $A_\alpha \models \gamma$, existe $\bar{b} \in A_\alpha^m$, tal que $A_\alpha \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$. Como ψ não tem quantificadores e A_α é subestrutura de A, temos que $A \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$ e, devido ao fato de tomarmos uma n-upla $\bar{a} \in A^n$ arbitrária, $A \models \gamma$, como era de se esperar.

Para a recíproca, suponhamos que T seja preservada por cadeias e obteremos uma axiomatização Γ consistindo de sentenças Π_2^0. Seja Δ o conjunto de todas as L-sentenças logicamente equivalentes a Π_2^0 sentenças. Observamos que Δ é fechado por disjunções finitas. Sejam $A \models T$ e $B \models T_{\forall\exists}(A)$ (isto é, B é modelo de todas as Π_2^0-sentenças satisfeitas em A). Queremos mostrar que $B \models T$, provando, assim, que T pode ser axiomatizada por um conjunto de Π_2^0-sentenças.

Para isto, primeiramente provaremos que existem estruturas A' e B', tais que $B \subset A' \subset B'$, $B \prec B'$ e $A \equiv A'$:

$$\begin{array}{ccc} B & \subset & A' \\ \curlyvee & \swarrow & ||| \\ B' & & A \end{array}$$

Para isto, expandimos L a $L(B)$, introduzindo novos símbolos de constantes $\{c_b : b \in B\}$, expandindo o modelo B à $L(B)$-estrutura $(B, b)_{b \in B}$, interpretando c_b pelo elemento $b \in B$. Seja T_1 a L-teoria de A (que é completa) e $T_2 = T_\forall^{L(B)}((B, b)_{b \in B})$ (ou seja, o conjunto de todas as sentenças Π_1^0 de $L(B)$ que sejam satisfeitas naquela estrutura).

A menos de equivalência lógica, T_2 é fechado por conjunções finitas, e, assim, para provarmos que $T_1 \cup T_2$ é consistente, usando o Teorema da Compacidade, basta considerarmos apenas uma sentança $\psi = \psi(c_{b_1}, \dots, c_{b_n}) \in T_2$ e mostrar que $T_1 \cup \{\psi\}$ tem modelo. Obtemos tal modelo observando que a L-sentença $\exists y_1 \dots \exists y_n \psi(\bar{y})$ é Σ_2^0 e é satisfeita em $(B, b)_{b \in B}$ – e, como tal sentença só contém símbolos de L, também é satisfeita em B. Portanto, $A \models \exists y_1 \dots \exists y_n \psi(\bar{y})$, pois, senão, sua negação, que é Π_2^0, seria satisfeita em A, o que implicaria que seria satisfeita em B, devido á hipótese de que $B \models T_{\forall\exists}(A)$. Seja $A_B = (A', b)_{b \in B}$ um modelo de $T_1 \cup T_2$ (contendo $B_B = (B, b)_{b \in B}$ como subestrutura), sendo que A' é sua restrição à assinatura L. Por construção, $A' \equiv A$ e, pela definição de T_2, toda L-sentença Π_1^0 satisfeita em B deverá ser satisfeita em A', o que implica que toda σ_1^0 senten ca de L satisfeita em A' também o será em B.

Para obtermos a estrutura B', expandimos a assinatura $L(B)$ a $L(A')$ e consideremos a teoria $\Delta(A'_B) \cup T(B_B)$ (a união do diagrama de A_B com o diagrama elementar de B_B). Tal teoria é consistente, pois, tomando uma conjunção finita de fórmulas de $\Delta(A'_B)$, trocando as constantes que não estejam em $L(B)$ por variáveis e quantificando-as existencialmente, obteremos que B_B seria modelo de tal fórmula – o Teorema da Compacidade dá a consistência almejada, e o modelo $B'_{A'} = (B', a)_{a \in A'}$, com B' sua restrição à assinatura L.

Observando a construção feita acima, concluímos que $B \subset A' \subset B'$, $B \prec B$ e $A' \equiv A$, como queríamos.

Agora iteramos essa construção, obtendo a seqüência de L-estruturas $B = B_0 \subset A_1 \subset B_1 \subset A_2 \subset \ldots$, tal que $A_{n+1} \equiv A$ e $B_n \prec B_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que sua união $A_\omega = B_\omega$ tem a seguinte propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \prec B_\omega$ (pelo Teorema 2.1, da União de Cadeias Elementares de Tarski) e $B_\omega = A_\omega \models T$, pois T é, por hipótese, preservada por união de cadeias. Isto significa que $B \models T$ e, portanto, T pode ser axiomatizada por um conjunto de Π_2^0 sentenças. $\square$

Para o próximo resultado de preservação, precisamos definir uma fórmula ϕ como sendo positiva se for constrída usando-se apenas os conectivos $\vee$ e $\wedge$ e os quantificadores $\exists$ e $\forall$ (ou seja, não contém nenhuma negação e nem implicação, que implicitamente envolve uma negação).

Teorema 3.2 Uma L-teoria consistente T é preservada por homomorfismos sobrejetores (não necessariamente elementares – toda T é preservada per estes!) se, e somente se, T pode ser axiomatizada por um conjunto de sentenças positivas.

Demonstração: Provemos a implicação ($\Leftarrow$), ou seja, temos que mostrar que toda fórmula positiva $\phi(\bar{x})$, com variáveis livres $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, é preservada por homomorfismos, ou seja, dados $A \models \phi(\bar{a})$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$

e $f : A \to B$, um homomorfismo sobrejetor, então $B \models \phi(\bar{f}(\bar{a}))$, sendo que $\bar{f}(\bar{a}) = (f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

Isto será feito por indução na complexidade de ϕ, sendo que o passo inicial, das fórmulas atômicas, e os passos de indução para os conectivos $\vee$ e $\wedge$ são imediatos.

Suponhamos que $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ seja preservada por homomorfismos sobrejetores e sejam $A \models \exists\phi(\bar{a})$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ e $f : A \to B$, um homomorfismo sobrejetor. Seja $a \in A$, tal que $A \models \phi(a, \bar{a})$. Pela hipótese sobre ϕ, $B \models \phi(f(a), \bar{f}(\bar{a}))$, o que implica que $B \models \exists\phi(\bar{f}(\bar{a}))$, ou seja, que $\exists x\phi$ também é preservada por homomorfismos sobrejetores.

Com a mesma hipótese sobre ϕ, sejam $A \models \forall x\phi(\bar{a})$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ e $f : A \to B$, um homomorfismo sobrejetor. Sejam $b \in B$ e $a \in f^{-1}(\{b\})$. Pela hipótese sobre ϕ e pelo fato de que $A \models \forall x\, \phi(\bar{a})$, temos que $B \models \phi(f(a), \bar{f}(\bar{a}))$, ou seja, $B \models \phi(b, \bar{f}(\bar{a}))$, o que implica que $B \models \exists\phi(\bar{f}(\bar{a}))$, ou seja, que $\forall x\phi$ também é preservada por homomorfismos sobrejetores.

Agora provaremos a implicação ($\Rightarrow$), em que usaremos união de cadeias elementares como ferramenta. Denotemos, para uma L-estrutura M, $T^+(M) = \{\phi : \phi$ *é sentença positiva satisfeita em* $M\}$.

Primeiramente provemos que:

> dadas duas L-estruturas A e B, satisfazendo as mesmas sentenças positivas, então existem extensão elementar $A' \succ A$ e L-morfismo injetor $f : A \to B'$, tal que $T^+((A, a)_{a\in A}) = T^+(B', f(a))_{a\in A}$.

Sejam $T_1 = T^+_{L(A)}(A_A)$, $A_A = (A, a)_{a\in A}$, e $T_2 = T_{L(B)}(B_B)$, $B_B = (B, b)_{b\in B}$. Pelos argumentos usuais de compacidade (exercício – quais?), $T_1 \cup T_2$ é consistente. Sejam $(B', a', b)_{a\in A,\, b\in B} \models T_1 \cup T_2$ e $f : a \in A \mapsto a' \in B'$ (sendo que a' representa o elemento de B' que interpreta o símbolo de constante c_a de $L(A)$). A teoria T_2 contém a informação de que $B \prec B'$ e T_1 a de que $T^+(A_A) = T^+((B', a')_{a\in A})$, como queríamos.

Sejam, agora, $A_0 \models T$ e $B_0 \models T^+(A_0)$. Aplicando sucessivamente a construção feita acima, obteremos as seqüências de estruturas:

$$\begin{array}{ccccccc}
A_0 & \prec & A_1 & \prec & A_2 & \prec & \ldots \\
 & \searrow^{f_0} & \uparrow_{g_1} & \searrow^{f_1} & \uparrow_{g_2} & & \\
B_0 & \prec & B_1 & \prec & B_2 & \prec & \ldots
\end{array}$$

de modo que

$$T^+((A_0, a)_{a\in A_0}) = T^+((B_1, f_0(a))_{a\in A_0}),$$

$$T^+((B_1, f_0(a), b)_{a\in A_0,\, b\in B_1} = T^+((A_1, a, g_1(b))_{a\in A_0,\, b\in B_1}),$$

$$T^+((A_1, a, g_1(b), a')_{a\in A_0,\, b\in B_1,\, a'\in A_1}) = T^+((B_2, f_0(a), b, f_1(a'))_{a\in A_0,\, b\in B_1,\, a'\in A_1}$$

e assim por diante, obtendo que cada $f_n : A_n \to B_{n+1}$ e $g_n : B_n \to A_n$ são morfismos injetores, f_{n+1} estende f_n e também g_{n+1}^{-1} (por isso as constantes redundantes).

Façamos as uniões das cadeias elementares $A_\omega = \bigcup_n A_n$ e $B_\omega = \bigcup_n B_n$ e sejam $f_\omega = \bigcup_n f_n : A_\omega \to B_\omega$ e $g_\omega = \bigcup_n g_n : B_\omega \to A_\omega$. Por construção, f_ω é homomorfismo sobrejetor (pois f_ω estende cada g_n^{-1}). Como T é preservada por homomorfismos sobrejetores e como $A_0 \prec A_\omega$ e $B_0 \prec B_\omega$, concluímos que $B_0 \models T$ e, portanto, T pode ser axiomatizada por sentenças positivas.

$\square$

4 Exercícios

Exercício 4.1 (Limites indutivos de L-estruturas) Seja $(I, \leq)$ uma ordem parcial dirigida à direita, ou seja, I é um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\leq$, com a propriedade de que dados $i, j \in I$, existe $k \in I$, tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Dadas L-estruturas A_i, $i \in I$, e morfismos de L-estruturas $F_{ij} : A_i \to A_j$, para todos $i, j \in I$, tais que $i \leq j$, e satisfazendo a hipótese de que se $i \leq j \leq k$, então $F_{ik} = F_{jk} \circ F_{ij}$.

1. Mostre que a relação $\sim$ em $\bigcup_{i\in I} A_i$ dada por $a \sim b$ se, e só se, supondo que $a \in A_i$ e $b \in A_j$, $F_{ik}(a) = F_{jk}(b)$, para **todo** $k \in I$, tal que $i \leq k$ e $j \leq k$, é uma relação de equivalência. Mostre que $\sim$ também pode ser definida por $a \sim b$ se, e só se, supondo que $a \in A_i$ e $b \in A_j$, $F_{ik}(a) = F_{jk}(b)$, para **algum** $k \in I$, tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Denotaremos a classe de um elemento a por $[a]$.

2. Seja A a seguinte estrutura, também denotada por $\lim_I A_i$, definida sobre o conjunto de classes da relação de equivalência $\sim$, interpretando cada símbolo de constante c pela classe de algum c^{A_i}; cada símbolo de função N-ária como $f^A([a_1], \dots, [a_n]) = [b]$, sendo que $a_1, \dots, a_n, b \in A_i$, para algum $i \in I$; e cada símbolo de relação N-ária R interpretado de modo que $([a_1], \dots, [a_N]) \in R^A$, sendo que $a_1, \dots, a_n, b \in A_i$, para algum $i \in I$, se, e só se, $(a_1, \dots, a_N) \in R^{A_i}$.

Mostre que essas definições independem do representante das classes de equivalência (principalmente que podemos tomar os elementos em uma única estrutura de cada vez).

3. Sejam $F_i : a \in A_i \mapsto [a] \in A$, $i \in I$. Mostre que se cada um dos morfismos F_{ij}, $i \leq j$, forem elementares, então cada F_i também será elementar.

Exercício 4.2 Mostre que q L-teoria (consistente) T é preservada por subestruturas (isto é, se $A \models T$ e $B \subseteq A$ é subestrutura, então $B \models T$) se, e somente se, tiver um conjunto de axiomas formados por sentenças Π^0_1.

Exercício 4.3 Mostre que q L-teoria (consistente) T é preservada por superestruturas (isto é, se $A \models T$ e $B \supseteq A$ é superestrutura, então $B \models T$) se, e somente se, tiver um conjunto de axiomas formados por sentenças Σ^0_1.

Exercício 4.4 Seja T_0 uma L-teoria qualquer (consistente). Dizemos que a L-teoria T é preservada por submodelos módulo T_0 (preservação relativizada a T_0) se, para todos $A, B \models T_0$, tais que $A \subseteq B$ e $B \models T$, então $A \models T$. Prove que T é preservada por submodelos módulo T_0 se, e somente se, $T \cup T_0$ pode ser axiomatizada por um conjunto $\Gamma \cup T_0$, tal que Γ é um conjunto de sentenças Π^0_1.

Exercício 4.5 Seja T_0 uma L-teoria qualquer (consistente). Dizemos que a L-teoria T é preservada por superestruturas módulo T_0 (preservação relativizada a T_0) se, para todos $A, B \models T_0$, tais que $A \subseteq B$ e $A \models T$, então $B \models T$. Prove que T é preservada por superestruturas módulo T_0 se, e somente se, $T \cup T_0$ pode ser axiomatizada por um conjunto $\Gamma \cup T_0$, tal que Γ é um conjunto de sentenças Σ^0_1.

Exercício 4.6 Seja T_0 uma L-teoria qualquer (consistente). Dizemos que a L-teoria T é preservada por uniões módulo T_0 (preservação relativizada a T_0) se, para todos $A_n \models T_0$, tais que $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $A_n \models T$, então $A_\omega = \bigcup_n A_n \models T$. Prove que T é preservada por uniões de cadeias módulo T_0 se, e somente se, $T \cup T_0$ pode ser axiomatizada por um conjunto $\Gamma \cup T_0$, tal que Γ é um conjunto de sentenças Π^0_2.

Exercício 4.7 Seja T_0 uma L-teoria qualquer (consistente). Dizemos que a L-teoria T é preservada por homomorfismos sobrejetores módulo T_0 (preservação relativizada a T_0) se, para todos $A, B \models T_0$, tais que exista homomorfismo sobrejetor $f : A \to B$ e $A \models T$, então $B \models T$. Prove que T é preservada por submodelos módulo T_0 se, e somente se, $T \cup T_0$ pode ser axiomatizada por um conjunto $\Gamma \cup T_0$, tal que Γ é um conjunto de sentenças positivas.

Índice Remissivo