Introdução à Lógica Matemática

Ricardo Bianconi

Capítulo 4

Dedução Informal

Antes de embarcarmos em um estudo da lógica formal, ou seja, daquela para a qual introduziremos uma nova linguagem artificial e mecanizada, vamos discutir brevemente alguns dos princípios e métodos de dedução matemática que serão usados neste texto.

A análise que faremos do Cálculo de Predicados (e seu fragmento proposicional) será levada a cabo em nossa língua, o Português. Os argumentos feitos nessa linguagem serão chamados de *metamatemácos* e os feitos nas linguagens formais (artificiais), a serem introduzidas mais adiante, serão chamados de *matemáticos*. Esta designação, herança dos linguistas, só serve para distinguir as proposições dos sistemas formais daquelas acerca de tais sistemas. Não tentaremos formalizar a linguagem metamatemática, pois seu estudo é bem mais complicado do que os sistemas formais a serem estudados aqui.

4.1 Valores de Verdade – A Lógica *Clássica*

Hoje em dia não se pode falar de uma lógica, no singular, para indicar um sistema de princípios e métodos de dedução. Por isso, chamamos a lógica estudada neste texto de *Lógica Clássica* para diferenciá-la das diversas lógicas presentes atualmente. Ela baseia-se em dois princípios fundamentais, já apresentados ao falarmos de Aristóteles:

> **Princípio da Não Contradição:** Uma sentença não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

Nem a todas as sentenças podemos atribuir um valor de verdade que faça sentido, pelo menos em matemática. Por exemplo, uma pergunta, uma interjeição, uma ordem. Apenas[1] àquelas sentenças que declaram alguma propriedade acerca de algum objeto faz sentido essa atribuição de valor. Tais sentenças serão chamadas de *proposições*. Para estas, o segundo princípio, que realmente caracteriza fortemente a lógica clássica, limita as possibilidades de velores de verdade.

> **Princípio do Terceiro Excluído:** Uma proposição pode ser somente verdadeira ou falsa. Não há outras possibilidades.

Com isto, separamos o conjunto de proposições em dois conjuntos disjuntos: as verdadeiras e as falsas.

A negação: Essa distribuição de proposições em verdadeiras ou falsas deve satisfazer alguns critérios. O primeiro refere-se à negação. Se uma proposição for verdadeira, sua negação será falsa e se aquela for falsa, sua negação será verdadeira. No entanto, vela mais do que isto: se a negação de uma proposição for verdadeira, então ela será falsa e se sua negação for falsa, então ela será verdadeira. Esta última afirmação distingue a lógica clássica da intuicionista (mais construtiva) e é a base das demonstrações por redução ao absurdo.

Deduções: uma dedução (ou também, demonstração) informal é um discurso realizado na língua portuguesa, eventualmente envolvendo alguns símbolos matemáticos, em que, partindo de certas proposições chamadas de *premissas* ou *hipóteses*, chegando, ao final a uma proposição que será a conclusão da argumentação, satisfazendo a condição de que ela seja verdadeira, se todas as premissas também o forem.

Argumentos Válidos: serão considerados válidos os argumentos (deduções) que tenham uma conclusão considerada verdadeira, mas também aquelas cuja conclusão seja falsa, quando alguma das premissas for falsa.

A implicação: uma implicação é uma proposição da forma *se A, então B*, sendo que A é uma premissa ou hipótese (que pode ser uma proposição bem complexa) e B é uma proposição, a sua conclusão ou tese. A ideia é que uma implicação contenha em si a informação de que das premissas possamos concluir a tese. Assim, se a hipótese for verdadeira, a tese terá que

[1] Existem lógicas, consideradas não clássicas, que estudam tais sentenças. Não serão tratadas aqui.

necessariamente ser verdadeira. Demonstrar uma implicação diretamente significa afirmar as premissas e chegar à conclusão. Podemos demonstrá-la também de duas maneiras indiretas:

1. **Contrapositiva:** nega-se a tese, isto é, assumimos que a tese é falsa, e concluímos que a premissa também será falsa, ou seja, concluímos a negação da premissa;

2. **Redução ao Absurdo:** neste caso negamos que a implicação seja verdadeira (isto ocorre se afirmamos a premissa e, ao mesmo tempo, negamos a tese) e concluímos uma contradição (ou seja, no discurso demonstrativo haverá duas proposições contraditórias – uma a negação da outra) – como estamos assumindo que a argumentação é válida, devemos concluir que a hipótese da negação da implicação será falsa e, portanto, que a implicação será verdadeira.

Muitos textos confundem estas duas formas indiretas de demonstração. Elas só divergem em lógicas não clássicas, como veremos mais adiante.

Exercício 4.1.1 A implicação pode ser escrita de diversas maneiras distintas em português. Nas frases abaixo, indique o que é premissa e o que é conclusão da implicação:

1. se A, então B;

2. A implica B;

3. B, sempre que A (sempre que A ocorre, então B também deve ocorrer);

4. B, se A;

5. A, somente se B (se B não ocorre, então A não pode ocorrer);

6. A e, portanto, B;

7. A é condição suficiente para B (supondo a implicação verdadeira, basta que A seja verdadeira para que possamos concluir que B é verdadeira);

8. B é condição necessária para A (supondo a implicação verdadeira, se B for verdadeira, A tem que necessariamente ser verdadeira).

Variáveis: para indicar um elemento indeterminado (de alguma classe) usamos uma letra ou símbolo, que chamamos de veriável (como uma variável ou incógnita de uma equação). Assim, frases do tipo *seja*[2] *P uma proposição* contém a letra P indicando uma proposição qualquer – essa letra pode ser substituída por uma proposição específica.

Generalização de variáveis: em uma demonstração de uma proposição do tipo "*toda P, sentença,* $\Phi(P)$[3]"em geral lançamos como uma premissa a frase "*seja P uma sentença*"e continuamos a argumentação até chegarmos à afirmação $\Phi(P)$. Depois argumentamos que *como P é genérico, a sentença* $\Phi(p)$ *vale para todo P.* Isto significa que não apareceu no texto da argumentação nenhuma premissa e nem proposição que particularizasse a classe de variação da variável P e, portanto, permitimo-nos concluir que a afirmação $\Phi(P)$ valha para todo P. Este é o chamado princípio ou regra da generalização.

4.2 Recursão e Indução Finita

Um tipo recorrente de definição neste texto serão as definições em que são feitas construções por recursão, o que significa que partimos de uma classe de elementos iniciais e agregamos símbolos, ou fazemos alguma conta, sobre o resultado anterior. Toma a seguinte forma:

> **Passo Inicial:** uma definição qualquer.
> **Passo recursivo:** assumimos ter construído o objeto e fazemos a aplicação de uma função ou algoritmo[4] ao tal objeto.

Assumimos neste caso que temos a descrição completa de uma dada classe de objetos. Em tais construções, atribuímos um número natural (em $\mathbb{N}$) a cada objeto, sendo o zero atribuído aos elementos iniciais e, na hipótese de ter sido atribuído um número[5] n a um objeto da classe, atribuiremos o número $n+1$ ao objeto obtido pelo passo recursivo. (Por exemplo, n seria o número de símbolos acrescentados ao objeto.)

[2]Este é um modo meio pedante de fazer a afirmação *P é uma proposição.*

[3]Veja que usamos aqui a letra grega Φ como uma variável para indicar uma sentença envolvendo a letra P como parâmetro.

[4]Algoritmo é qualquer procedimento que acreditemos ser *mecanizável.*

[5]Usando uma variável n para indicar um elemento de $\mathbb{N}$.

Princípio da Indução Finita: se uma dada propriedade $\Phi(n)$ de números naturais vale em $n = 0$ e se também, para cada n a validade de $\Phi(n)$ implicar a de $\Phi(n+1)$, então é válido concluir que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a propriedade $\Phi(n)$ vale.

Uma dedução por indução corre nos seguintes moldes:

- demonstração de $\Phi(0)$;
- assumir, como premissa, que valha $\Phi(n)$ (n uma variável para número natural);
- após alguma argumentação, concluir que vale $\Phi(n+1)$;
- *como n é genérico*, para todo n, vale que $\Phi(n)$ implica $\Phi(n+1)$;
- concluir, pelo princípio da indução, que para todo n vale $\Phi(n)$.

4.3 Conjuntos e Classes

Vamos assumir que existam os conjuntos de elementos que porventura apareçam neste texto, no sentido que acreditaremos que afirmar sua existência não traga contradições. Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, etc.

Do ponto de Teoria dos Conjuntos (que não é o assunto deste texto) essa suposição não é problemática, exigindo apenas o uso de alguns dos axiomas dessa teoria. Para referência futura, listaremos os axiomas (premissas sempre presentes) que tradicionalmente têm sido usados:

1. (Extensionalidade) Dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuirem os mesmos elementos.
2. (Conjunto vazio) Existe um conjunto sem elementos $\varnothing$ (o conjunto vazio).
3. (Par não ordenado) Para cada x e y, existe um conjunto z contendo exatamente esses dois elementos, $z = \{x, y\}$.
4. (União) Dada uma família de conjuntos x, existe um conjunto y contendo todos os elementos de cada conjunto em x, denotado por $y = \bigcup x$.

5. (Separação) Para cada propriedade[6] de conjuntos (expresso em uma linguagem conveniente) $\varphi(\bar{x}, y)$, em que $\bar{x}$ é uma n-upla de variáveis, existe o conjunto $z = \{y \in u : \varphi(\bar{x}, y)\}$.

6. (Substituição) Para cada propriedade $\varphi(x, y, \bar{u})$ que defina uma função $y = f(x, \bar{u})$ (com parâmetros $\bar{u}$) então a imagem de um conjunto v por esta função também é um conjunto, ou seja, existe o conjunto $w = \{f(x, \bar{u}) : x \in v\}$.

7. (Partes) Existe um conjunto y cujos elementos são todos os subconjuntos de x, $y = P(x)$.

8. (Infinito) Existe um conjunto x tal que $\varnothing \in x$, e se $y \in x$ então $y \cup \{y\} \in x$.

9. (Regularidade) Se $x \neq \varnothing$ então existe um $y \in x$ tal que $x \cap y = \varnothing$. (Este axioma somente interessa a quam estuda Teoria dos Conjuntos.)

10. (Escolha) Se u é uma família de conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, então existe um conjunto v contendo exatamente um elemento de cada $x \in u$.

Observemos que o princípio da indução finita pode ser demonstrado na Teoria dos Conjuntos, uma vez que se saiba como definir uma conjunto de números naturais.

[6]Este, na verdade, pode ser considerado como uma lista infinita de axiomas, um para cada propriedade denotada por φ – esta é uma interpretação mais fácil de aceitar – ou um *meta-axioma* contendo a letra grega φ como uma variável.