Lista 1 de MAT 3110

ATUÁRIA - FEA - 1o. sem. 2017 - Turma 26 (N)

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. SOBRE FUNÇÕES

1. Para cada uma das funções abaixo, determine o domínio e esboce seu gráfico.

a. $f(x) = \sqrt{x+1}$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **c.** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ **d.** $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ **e.** $y = \dfrac{1+x}{x}$

f. $f(x) = \sqrt{x^2}$ **g.** $y = x^2\,|x|$ **h.** $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ **i.** $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$

j. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **k.** $f(x) = x - |\,x\,|$ **l.** $f(x) = |\text{ sen } x\,|$ **m.** $f(x) = |\,x - 2\,| - 2$

n. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **o.** $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ **p.** $y = \dfrac{1}{x^2}$ **q.** $y = -\dfrac{1}{x^2} + 1$ **r.** $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

s. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x - 4}{x - 2}$ **t.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ **u.** $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x < 1 \\ x+1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

v. $f(x) = \begin{cases} |6x-2|, & \text{se } x \geq 0 \\ 2x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ **x.** $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ 3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

2. Determine o domínio das funções dadas abaixo:

a. $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$ **b.** $y = \sqrt{x^2 - x}$ **c.** $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ **d.** $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

II. SOBRE LIMITES E CONTINUIDADE

1. Calcule os seguintes limites, caso existam, **justificando seu cálculo**:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-2}$ b.. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{x-1}$ c. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{|x-1|}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|}$ e. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$ f. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$ h. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4}$ i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$

j. $\displaystyle\lim_{u\to 2} \frac{\sqrt{u^2+12}-4}{2-\sqrt{u^3-4}}$ k. $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{\sqrt[5]{t}+1}{t+1}$ l. $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{5}} \frac{2-\sqrt{x^2-1}}{x^2-2}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{2-\sqrt{x^2-1}}{x^2-5}$ n. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ o. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$

2. Calcule os seguintes limites, caso existam, **justificando seu cálculo**:

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x+5x^2-5x^5}{2x^3-2x^2+5}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^6+7x^4+7}}{x^4-2}$ c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{9x+1}{2x+1}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)$ $(a,b>0)$

f. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5+2x^2-4}{\sqrt{x^6+x+7}}$ g. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$ h. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2}-x\right)$

i. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{sen(x^2-3x+2)}{x-2}$ j. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{2x}$ k. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(sen(2x))}{x}$

l. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ m. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x}$ n. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(11x)}{\operatorname{sen}(12x)}$

o. $\displaystyle\lim_{u\to 2^-} \frac{2}{u^2-3u+2}$ p. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x^2-3x+2}$ q. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{2x+\operatorname{sen} x}$

3. A resolução abaixo está incorreta, embora o resultado esteja correto!!!!!. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0}=\lim_{x\to+\infty}(x\cdot 0)=0.$$

4. Dê exemplos de:

a. funções f, g tais que o $\displaystyle\lim_{x\to p}(f(x)+g(x))$ existe (finito), mas que os $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to p} g(x)$ não existem (finitos).

b. funções f, g tais que o $\displaystyle\lim_{x\to p}(f(x)g(x))$ existe (finito), mas que pelo menos um dos $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x)$ ou $\displaystyle\lim_{x\to p} g(x)$ não existe (finito).

5. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Assuma que você sabe que $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2}=2$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ e que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=+\infty$. Calcule, justificando, os seguintes limites: $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

6. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é Verdadeira (V) ou Falsa (F). Se for V, prove; caso contrário, dê um contra-exemplo.

   a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Se $|f|$ tem limite em um ponto p , então f tem limite nesse ponto.

   b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções ambas não contínuas em um ponto $p \in \mathbb{R}$, então a função fg também não será contínua nesse ponto.

   c) Se f e g são funções tais que $\lim\limits_{x\to p} (f(x) + g(x)) = \ell \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, então $\exists \lim\limits_{x\to p} f(x) = \ell - \ell_2$.

7. Para cada função dada, determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que ela é contínua. Justifique.

   a. $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

   b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

   c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 2, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

   d. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-1) - 1, & \text{se } x > 1, \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x < 1, \\ -1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

8. Determine o valor de ℓ, caso exista, para que a função dada seja contínua no ponto dado.

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 5, \\ \ell, & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $x_o = 5$

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ \ell, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $x_o = 0$

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2}, & \text{se x} \neq 0, \\ \ell, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $x_o = 0$.

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

   Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por quê?