

RESUMO SOBRE LIMITES

I. Limites finitos

1. “Noção”: Sejam f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dizemos que f tem limite (finito) ℓ no ponto x_0 (em símbolo: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$), se e somente se,

- quando $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_0$ com $x \neq x_0$, tivermos que $f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell$.

“Traduzindo”

- Para valores de $x \in \text{Dom } f$ ($x \neq x_0$) convenientemente próximos de x_0 , os valores de $y = f(x)$ estão arbitrariamente próximos de ℓ (isto é, $f(x)$ e ℓ sempre estão tão próximos quanto quisermos um do outro.)

2. Limites laterais

- 2.1. O $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ (limite lateral à direita de f em x_0) significa :

- Se $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_0$ e $x > x_0$, então $f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell_1$

- 2.2. O $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ (limite lateral à esquerda de f em x_0) significa:

- Se $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_0$ e $x < x_0$, então $f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell_2$

2.3. Proposição 1.

$$\text{Existe } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ se e somente se } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}$$

2.4. Proposição 2. - Propriedades Operacionais dos limites

Sejam f e g definidas em um conjunto A e $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$. Então:

i. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$.

ii. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \ell_1$.

iii. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \ell_2$.

iv. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$, desde que $\ell_2 \neq 0$.

v. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)| = |\ell_1|$.

Observações:

O.1. **Cuidado** com a distribuição do símbolo de $\lim_{x \rightarrow x_0}$ na soma, produto e quociente, sem antes testar se existem os limites das funções envolvidas!!!!

O.2. A Proposição 2. continua válida se o símbolo $\lim_{x \rightarrow x_0}$ for substituído por um dos símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-}.$$

3. Continuidade

3.1. **Definição**- Sejam f uma função e $x_0 \in \text{Dom } f$.

- Dizemos que f é contínua em x_0 se e somente se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Dizemos que f é contínua, se ela é contínua em cada ponto x_0 do seu domínio.

3.2. **Proposição 2***: Sejam f e g funções contínuas em x_0 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

- As funções $f + g$, αf e fg são contínuas em x_0 .
- A função $\frac{f}{g}$ é contínua em x_0 , desde que $g(x_0) \neq 0$.

3.3. Continuidade x Limites em composta de funções

Proposição 3. Sejam f e g funções tais $\text{Im } f \subset \text{Dom } g$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideremos a função composta $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

a. Se existir $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ e g for contínua em ℓ , então existe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g(f(x))) = g(\ell) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)).$$

b. Se f for contínua em $x_0 \in \text{Dom } f$ e g for contínua em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0 .

4. Limites finitos - Mais Propriedades

4.1. Proposição 4. Seja f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0.$$

4.2. Teorema 5. (Teorema do Confronto)

Sejam f , g e h funções e $x_0 \in \mathbb{R}$. Suponhamos que estejam satisfeitas as condições:

a. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, com $x \neq x_0$ ($r > 0$) e

b. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$.

$$\text{Então o } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

4.3. Corolário 6. Sejam F e G funções tais que:

a. $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = 0$ e

b. $|G(x)| \leq M$, para algum $M > 0$, para todo $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, $x \neq x_0$ ($r > 0$) (i.é, G é limitada numa vizinhança de x_0)

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow x_0} (F(x) G(x)) = 0.$$

4.4. Proposição 7. (1º Limite Fundamental)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

II. Limite Finito no Infinito

5. “Noção”

Sejam $\ell \in \mathbb{R}$ e uma função f cujo domínio contém um intervalo $[a, +\infty[$ ou $] -\infty, b]$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell$, quando x se “torna cada vez maior positivamente”.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff f(x) \overset{\text{arbitr}}{\approx} \ell$, quando x se “torna cada vez menor negativamente”.

III. Limite Infinito no ponto

6. “Noção” Sejam f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff f(x) > K$, para qualquer número positivo K , quando $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_0, x \neq x_0$.
“Tradução”: $f(x)$ “aumenta positiva e ilimitadamente”, quando x se aproximar convenientemente de $x_0, x \neq x_0$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff f(x) < N$, para qualquer número negativo N , se $x \overset{\text{conven}}{\approx} x_0, x \neq x_0$.
“Tradução”: $f(x)$ “diminui negativa e ilimitadamente”, quando x se aproximar convenientemente de $x_0, x \neq x_0$.

7. Limites Laterais infinitos

7.1. “Noção”: Sejam f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \iff f(x) > K, \text{ para qualquer número positivo } K, \text{ quando } x \overset{\text{conven}}{\approx} x_0, x > x_0.$$

De forma análoga tem-se as noções dos símbolos: (TENTE ESCREVER tais noções.)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

IV. Limite Infinito no Infinito

8. “Noção” Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo $[a, +\infty[$ (ou $] -\infty, b]$).

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : \Longleftrightarrow f(x) > K$, para qualquer número positivo K , quando x se “torna cada vez maior positivamente”.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow f(x) < N$, para qualquer número negativo N , quando x se “torna cada vez maior positivamente”.

• Analogamente, tem-se a noção de

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

9. Limite Infinito - Propriedades

9.1. Proposição 8. (Limite zero SOMENTE no denominador!)

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$ e g uma função tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

- i. Se $g(x) > 0$, numa vizinhança de x_0 ($x \neq x_0$), então $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$.
- ii. Se $g(x) < 0$, numa vizinhança de x_0 , $x \neq x_0$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$.

9.2. Observação: A Proposição 8 é válida para limites laterais à direita ou à esquerda de x_0 , bem como para limites no infinito, com as devidas adaptações dos sinais da função $g(x)$ nos intervalos envolvidos.

10. Limites Infinitos X Limites Finitos- Propriedades

10.1. Proposição 9. Sejam f uma função e $x_0 \notin \text{Dom } f$.

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty), \text{ então } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

• Observação: A Proposição 9 continua válida se o símbolo “ $x \rightarrow x_0$ ” é substituído por um dos símbolos:

$$“x \rightarrow x_0^+”, “x \rightarrow x_0^-”, “x \rightarrow +\infty” \quad \text{ou} \quad “x \rightarrow -\infty”.$$

11. Limites no infinito e continuidade em composta de funções

11.1. Proposição 3*. Sejam f e g funções tais $\text{Im } f \subset \text{Dom } g$ e $[a, +\infty[\subset \text{Dom } f$. Consideremos a função composta $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Se existir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ e g for contínua em ℓ , então existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(f(x))) = g(\ell) = g(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)).$$

• Observação: A proposição acima continua válida se o $x \rightarrow +\infty$ for substituído por $x \rightarrow -\infty$.

11.2. Teorema 5.* (Teorema do Confronto no infinito)

Sejam f , g e h funções cujos domínios contêm um intervalo $[a, +\infty[$. Suponhamos que estejam satisfeitas as condições:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x > a$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

Então o $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

11.3. Corolário 6.* Sejam F e G funções tais que:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ e
2. $|G(x)| \leq M$, para algum $M > 0$, para todo $x > a$.

Então, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) G(x)) = 0$.

• Observação: O Teorema 5* e seu Corolário são válidos se os domínios da f , g e h contiverem um intervalo $] -\infty, b]$ e as hipóteses forem adaptadas para tal intervalo.

12. Limites Infinitos x Finitos - Propriedades

12.1. Proposição 10. (Operando com limites infinitos)

Sejam f e g funções e $x_0 \in \mathbb{R}$. São válidas as propriedades:

$$\begin{array}{ll} \text{a. Se } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = e \end{array} \right. & \text{então } \left\{ \begin{array}{l} \text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty \\ \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \end{array} \right. \\ \text{b. Se } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = e \end{array} \right. & \text{então } \left\{ \begin{array}{l} \text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty \\ \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{c. Se } \left\{ \begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{array} \right. \text{ então } \left\{ \begin{array}{c} \text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = +\infty \\ \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \end{array} \right.$$

$$\text{d. Se } \left\{ \begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \end{array} \right. \text{ então } \left\{ \begin{array}{c} \text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty \\ \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 0 \\ -\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{e. Se } \left\{ \begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \text{e} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \end{array} \right. \text{ então } \left\{ \begin{array}{c} \text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty \\ \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell > 0 \\ +\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

12.2. Observações:

O.1. As afirmações da Proposição 10 continuam válidas se o símbolo " $x \rightarrow x_0$ " for substituído por um dos símbolos:

$$"x \rightarrow x_0^-", \quad "x \rightarrow x_0^+", \quad "x \rightarrow +\infty" \quad \text{ou} \quad "x \rightarrow -\infty".$$

O.2. As Proposições 2 (sobre limites finitos) e 10 (sobre limites infinitos) mostram que os seguintes "símbolos" são **indeterminações**:

$$" \frac{0}{0} ", \quad " \frac{\pm\infty}{\pm\infty} ", \quad " 0 \cdot (\pm\infty) ", \quad " +\infty + (-\infty) " \quad \text{e} \quad " -\infty + (+\infty) ".$$

O.3. Mais tarde, veremos que, em limites, também são **indeterminações** os símbolos:

$$" 0^0 ", \quad " \infty^0 ", \quad " 1^\infty ".$$