I. Integral Definida e Área

(ilustração by Prof. Jorge T. Hiratuka)

Seja f uma função definida e limitada em um intervalo $[a, b]$.

Seja uma divisão (partição) do intervalo $[a, b]$ em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, ..., n$, onde $x_o = a$ e $x_n = b$.

Seja também uma escolha com $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, ...n$ e denotemos por Δx_i o comprimento de cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, i.é, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Para essa subdivisão de $[a, b]$ e essa escolha de c_i, consideremos a soma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ (denominada soma de Riemann relativa à divisão e escolha feita acima).

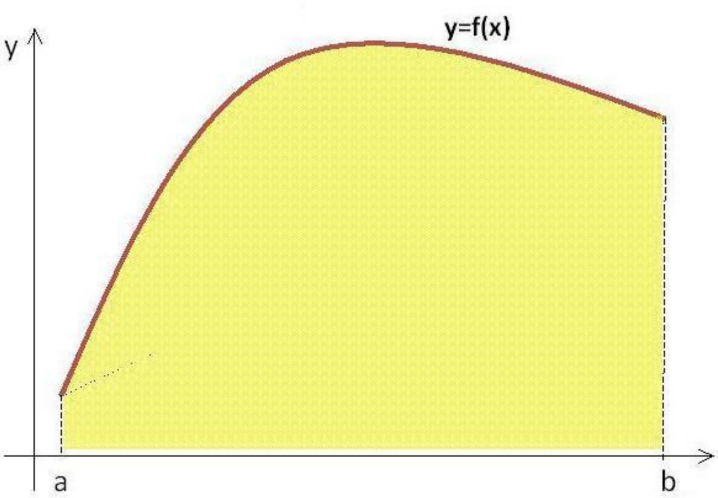
Dizemos que a função f **é integrável** em $[a, b]$ se

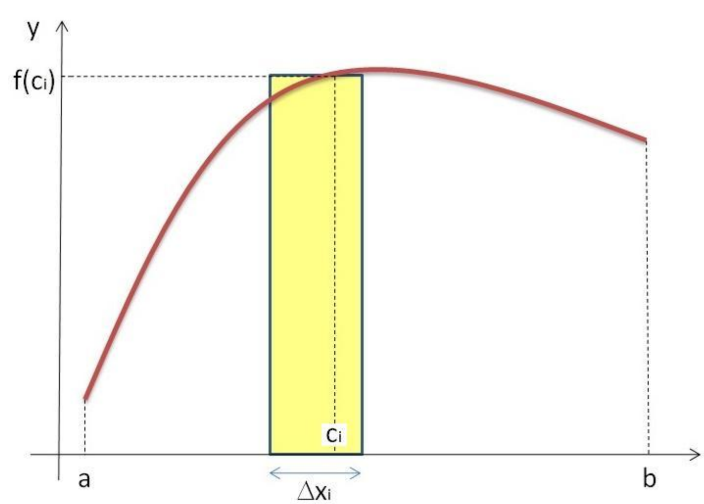
$\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \ell \in \mathbb{R}$, para todas as escolhas de c_i e todas as partições de $[a, b]$ em que $\max \Delta x_i \to 0$.

Tal limite ℓ é denominado integral definida de f em $[a, b]$ e denotado por

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

• **Observação:** Nas condições acima, se $\boxed{f \geq 0}$, a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é **a área da região plana $\mathcal{R}$ delimitada pela retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo x e a curva $y = f(x)$.** (ver figura abaixo)





• Em caso de ser $\boxed{f \leq 0}$, a área da região delimitada pelas retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo x e pela curva $y = f(x)$, será então simétrica, em relação ao eixo x, à que está desenhada acima, e por isso sua área é dada por $\int_a^b (-f(x))\,dx$.

- **Algumas propriedades da Integral definida**

Teorema 1. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$. Então f é integrável em $[a, b]$.

Teorema 2. *(Teorema Fundamental do Cálculo Integral)* Seja f uma função definida em um intervalo $[a, b]$. Suponha que

- f seja integrável em $[a, b]$ (i. é, existe $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$) e que
- f admita uma primitiva F em $[a, b]$ (i. é, existe uma função F t.q. $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$).

$$\text{Então} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \left(\text{notação: } F(x)\Big|_a^b\right).$$

II. Primitivação ou Integral Indefinida

Definição 1: (Primitiva ou anti-derivada) Seja uma função f definida em um intervalo I.

Dizemos que f admite uma **primitiva** em I se existir uma função F, definida em I, tal que $F'(x) \; = \; f(x), \quad$ para todo $x \in I$.

- Uma tal função F é denominada uma **primitiva** (ou uma anti-derivada) de f em I.

Definição 2: (integral indefinida de f) Seja f uma função definida em um intervalo I.

A família de todas as funções primitivas de f é denominada integral indefinida de f e é denotada por $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + k$, onde F é uma primitiva de f e $k \in \mathbb{R}$.

Propriedades Operacionais da primitivação:

- Sejam f e g funções definidas em um intervalo I e suponhamos que elas admitam, respectivamente, uma primitiva F e G em I. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

i. $F + G$ é uma primitiva de $f + g$ em I e $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + k$

ii. $\alpha\,F$ é uma primitiva de $\alpha\,f$ em I e $\displaystyle\int \alpha\,f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx = \alpha\,F(x) + k$.

Algumas Primitivas imediatas

1. $\int \beta\, du = \beta\, u + k,\ k \in \mathbb{R}$ pois $\dfrac{d}{du}(\ \beta\, u\ ) = \beta.$

2. $\int u^{\alpha}\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,$ com $\alpha \neq -1,$ pois $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \dfrac{(\alpha+1)\cdot u^{\alpha}}{\alpha+1} = u^{\alpha}.$

3. $\int \dfrac{1}{u}\, du = ln\,|u| + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ ln\, u\ ) = \dfrac{1}{u},$ se $u > 0$ e $\dfrac{d}{du}(\ ln(-u)\ ) = \dfrac{-1}{-u},$ se $u < 0.$

4. $\int e^{u}\, du = e^{u} + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ e^{u}\ ) = e^{u}.$

5. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ \operatorname{sen} u\ ) = \cos u.$

6. $\int \operatorname{sen} u\ du = -\cos u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ -\cos u\ ) = -(-\operatorname{sen} u) = \operatorname{sen} u.$

7. $\int \sec^2 u\ du = \operatorname{tg} u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ \operatorname{tg} u\ ) = \sec^2 u.$

8. $\int \operatorname{cossec}^2 u\ du = -\operatorname{cotg} u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ -\operatorname{cotg} u\ ) = -(-\operatorname{cossec}^2 u) = \operatorname{cossec}^2 u.$

9. $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u\ du = \sec u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ \sec u\ ) = \sec u \cdot \operatorname{tg} u.$

10. $\int \operatorname{cossec} u \cdot \operatorname{cotg} u\ du = -\operatorname{cossec} u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\ -\operatorname{cossec} u\ ) = -(-\operatorname{cossec} u \cdot \operatorname{cotg} u).$

11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du = \operatorname{arcsen} u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\operatorname{arcsen} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$

12. $\int \dfrac{1}{1+u^2}\ du = \operatorname{arctg} u + k,$ pois $\dfrac{d}{du}(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{1}{1+u^2}.$

• A. Primitiva de produto de funções - integração por partes

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis em um intervalo I.

Se o produto $u'(x) \cdot v(x)$ admitir uma primitiva, então a função produto $u(x) \cdot v'(x)$ admite primitiva em I e é tal que:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

• B. Primitiva de produto de funções com composta (ou A.R.C) :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Proposição: Sejam f e g funções definidas em intervalos de forma que a composta $f \circ g$ esteja definida. Suponhamos que

$$\begin{cases} \bullet\ g \ \text{ seja derivável } \quad e \\ \bullet\ \displaystyle\int f(t)\, dt = F(t) + k \quad (\text{i.é, } F' = f). \end{cases}$$

Então $\boxed{\displaystyle\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + k}$

Observação: Ou seja,

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t}) \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{dt} \overset{t=g(x)}{=} \int f(t)\, dt = F(t) + k \overset{t=g(x)}{=} F(g(x)) + k.$$