I. Resolução de exercicios de aplicação à Física - seção III- 1a. lista

Ex. III - 2.*Energia cinética.* **2.** *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior Exercício II.1), a segunda lei de Newton e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}m\,v_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2.

Em Física, a expressão $\frac{1}{2}m\,v^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

Solução: Pelo teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann (* - ver enunciado abaixo), tem-se:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\;dx \;=\; \int_{t_0}^{t_1} F\big(x(t)\big)x'(t)\;dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} m\,x''(t)\,x'(t)\;dt \;=$$

$$= m\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\big(x'(t)\big)^2}{2}\Big)\;dt \;=\; \frac{1}{2}\,m\,\big(x'(t_1)\big)^2 \;-\; \frac{1}{2}\,m\,\big(x'(t_0)\big)^2,$$

sendo a última igualdade consequência do Teorema Fundamental do Cálculo.

(*) *Teorema de mudança de variáveis p/ integral definida:*
Sejam f uma função contínua num intervalo I e a e b em I. Seja a função $g : [c, d] \to I$, derivável, com g' contínua em $[c, d]$ e $g(c) = a$, $g(d) = b$.
Então, $\displaystyle\int_a^b f(x)\;dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\;du.$

Ex. III.3. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to I\!R$ e sob ação de uma força $f(x)\overrightarrow{i}$, dada $f : I\!R \to I\!R$ contínua.

Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m :]-c, c[\to I\!R$ definida por:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

onde $c > 0$ é a velocidade da luz e $m > 0$ a massa de repouso e a função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\Big(m(x'(t))x'(t)\Big) = f\big(x(t)\big).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então:

$$\Delta E = \Delta m\, c^2.$$

(*Sugestão:* Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo.)

Solução: Como $m = \frac{m_o}{\sqrt{1-(x'/c)^2}} = m_o\Big(1 - (x'/c)^2\Big)^{-1/2}$, tem-se:

$$m' \;=\; -\frac{1}{2}\, m_o\Big(1 - (x'/c)^2\Big)^{-3/2} \cdot \frac{(-2x'x'')}{c^2} \;=\; \frac{m_o\, x'\, x'' c}{\Big(c^2 - (x')^2\Big)^{3/2}}, \;\; (*)$$

portanto:

$$\big(m\,x'\big)' \;=\; m'\,x' \;+\; m\,x'' \;\stackrel{(*)}{=}\; \frac{m_o (x')^2\, x''\, c}{\Big(c^2 - (x')^2\Big)^{3/2}} + \frac{m_o\, c\, x''}{\Big(c^2 - (x')^2\Big)^{1/2}} \;=$$

$$= \;\frac{m_o\, c\, x''\Big(c^2 - (x')^2\Big) \;+\; m_o\,(x')^2\, x''\, c}{\Big(c^2 - (x')^2\Big)^{3/2}} \;=\; \frac{m_o\, c\, x'' c^2}{\Big(c^2 - (x')^2\Big)^{3/2}} \;\cdot\; (**)$$

Comparando (*) e (**), resulta que $\Big(m\,x'\Big)'\,x' \;=\; m'\,c^2,$ (***).

Assim, aplicando-se o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann, conclui-se que o trabalho da força será dado por:

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)\;dx \;=\; \int_{t_o}^{t_1} f\big(x(t)\big)\,x'(t)\;dt \;=\; \int_{t_o}^{t_1} \big(mx'\big)'\,x' \;=$$

$$\stackrel{(***)}{=}\; c^2 \int_{t_o}^{t_1} m' \;=\; c^2\,\big(m(t_1) - m(t_o)\big).$$