6a. Lista de Exercícios de MAT 121 - Cálculo II
Bacharelado de Física- 2o. semestre de 2010 - Noturno - Turma 24
Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Sobre plano tangente e reta normal- da 5a. lista

1. Determine uma equação do plano tangente e da reta normal às superfícies dadas abaixo nos pontos indicados.

a. $z = \text{arctg}(\text{x} - 2\text{y})$ em $\left(2, \frac{1}{2}, z(2, \frac{1}{2})\right)$. **b.** $z = x\,e^{x^2-y^2}$ em $(2, 2, z(2, 2))$.

c. $z = x^3y^3 + 2xy - 3x$ em $(1, -1, f(1, -1))$. **d.** $z = e^x\, ln\, y$ em $(3, 1, 0)$.

2. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável tal que o plano de equação $4x+3y-5z-12 = 0$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

a. Determine o valor das derivadas parciais de 1a. ordem de f em $(1, 1)$.

b. Escreva uma equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

3. Determine um plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que é tangente ao gráfico da função $z = xy$. Só existe um só plano nestas condições?

4. Determine $k \in I\!R$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

5. Determine o plano que é paralelo ao plano $z = 2x+3y$ e tangente à superficie de equação $z = x^2 + xy$.

II. Sobre derivadas parciais de ordem superior

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2a. ordem de;

a. $z = x^4y^2 - \dfrac{x^3y}{2} + y^3$ **b.** $f(x, y) = \cos(x^3\, y^2)$

2. Seja a função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

a. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$, para todo $y \in I\!R$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$, para todo $x \in I\!R$.

b. Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

III. Sobre Regra da Cadeia e aplicações

1. Seja $f(x, y) = \text{sen}(xy^2)$ e considere $x = t^2$ e $y = 4t$, para todo $t \in I\!R$. Tomando $z(t) = f(x(t), y(t))$, para $t \in I\!R$,

a. Determine $z = z(t)$. **b.** Calcule $z'(t)$ diretamente e depois via a Regra da Cadeia.

2. A trajetória da curva $\gamma(t) = (2t,\ t^2,\ z(t))$ está contida no gráfico da função diferenciável $z = f(x, y)$. Sabendo-se que $f(2, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$, determine a equação da reta tangente à γ no ponto $\gamma(1)$.

3. Seja $f = f(x, y)$ uma função diferenciável e seja $z(t) = t^2\, f(t^3, e^{t^2})$. Expresse $z'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

4. Sejam $z = g(x, y)$ uma função diferenciável no $\mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tais que $g(t, h(t)) = 3$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Supondo que $h(0) = 2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, 2) = 1$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, 2) = 4$, qual a equação da reta tangente à curva plana $\gamma(t) = (t, h(t))$ no ponto $\gamma(0)$?

5. Seja $w = f(x, y)$ uma função diferencíavel tal que $f(3t, t^3) = \operatorname{arctg} t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
a. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 2$, qual é o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 1)$?
b. Qual a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(3, 1, f(3, 1))$?

6. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável.
a. Considere a função $g(u, v) = f(u^2 + 3v, u - 4v^2)$. Determine as derivadas parciais de 1a. ordem de g, em termos das derivadas parciais de f.
b. Idem para $g(u, v) = f(uv, u^3 - v^2)$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$, tal que $\nabla f(-2, -2) = (a, -4)$. Considere a função $g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t)$. Determine o valor de a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

8. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável tal que $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que a função $h(t) = f(t, \frac{2}{t})$, para $t > 0$, é constante.

9. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável tal que $f(3, 4) = 1$ e $\nabla f(3, 4) = (-2, 5)$. Considere a função $g(u, v) = u^2\, f(3uv, 2u^2 + 2v^3)$. Calcule $\nabla g(1, 1)$.

10. Seja a função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Considere a curva $\gamma(t) = (t,\, t)$, para $t \in \mathbb{R}$, e seja a função $z(t) = f(\gamma(t))$.
a. Determine a sentença de $z = z(t)$.
b. Calcule $\dfrac{dz}{dt}(0)$, usando a sentença obtida em a.
c. Calcule $\nabla f(0, 0) \circ \gamma\,'(0)$. Compare este resultado com o obtido em b. Voce sabe explicar o que aconteceu e o motivo do acontecido?