

5a. Lista de Exercícios de MAT 121 - Cálculo II
Bacharelado de Física- 2o. semestre de 2010 - Noturno - Turma 24
Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Ainda sobre limites e derivadas parciais

1. Calcule os limites indicados abaixo:

a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + \sin(x^2 + y^2)}{y^4 + 2\sin(x^2 + y^2)}$

c. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^3}$

d. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 y}{3x^2 + (y - 1)^4}$

2. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

a. $z = \arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)$

b. $z = \ln(1 + \cos^2(x^3 y))$

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de 1a. ordem de:

a. $u(x, y) = f\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)$

b. $u(x, y) = f(ax + by)$, onde a e b são constantes.

II. Sobre diferenciabilidade

1. Justifique a diferenciabilidade das seguintes funções:

a. $f(x, y) = xy$

b. $g(x, y) = 3x - y$

c. $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$

d. $\ln(x^2 + y^2)$

e. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$

f. $g(x, y) = |xy|^{5/4}$

Observação: nos itens e. e f. tomar cuidado com o ponto $(0, 0)$.

2. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} + \sin(x + 3y) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a. Mostre que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

b. f é contínua em $(0, 0)$?

c. f é diferenciável em $(0, 0)$?

3. Seja $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a. Mostre que g é contínua em $(0, 0)$.

b. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$.

c. g é diferenciável em $(0, 0)$?

d. São $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ contínuas em $(0, 0)$?

4. Determine os pontos em que as funções abaixo são diferenciáveis:

$$\begin{aligned} \text{a. } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{b. } h(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + 3y & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{c. } g(x, y) &= \begin{cases} \frac{3x^4}{x^2 + y^2} - 3x & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

5. Considere a função $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$.

6. Determine uma equação do plano tangente e da reta normal às superfícies dadas abaixo nos pontos indicados.

$$\begin{aligned} \text{a. } z &= \arctg(x - 2y) \text{ em } \left(2, \frac{1}{2}, z(2, \frac{1}{2})\right). & \text{b. } z &= x e^{x^2 - y^2} \text{ em } (2, 2, z(2, 2)). \\ \text{c. } z &= x^3 y^3 + 2xy - 3x \text{ em } (1, -1, f(1, -1)). & \text{d. } z &= e^x \ln y \text{ em } (3, 1, 0). \end{aligned}$$

7. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável tal que o plano de equação $4x + 3y - 5z - 12 = 0$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 1)$.

a. Determine o valor das derivadas parciais de 1a. ordem de f em $(1, 1)$.

b. Escreva uma equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

8. Determine um plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que é tangente ao gráfico da função $z = xy$. Só existe um só plano nestas condições?

9. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

10. Determine o plano que é paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente à superfície de equação $z = x^2 + xy$