3a. Lista de Exercícios de MAT 121 - Cálculo II
Bacharelado de Física- 2o. semestre de 2010 - Noturno - Turma 24
Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Sobre Curvas

1. Faça um esboço do traço (ou trajetória) das seguintes curvas planas parametrizadas:

a. $\gamma(t) = (2, t)$ **b.** $\gamma(t) = (t^2 - t, t)$ **c.** $\gamma(t) = (2t, 2t)$
d. $\gamma(t) = (3t + 1, 2t - 2),\ t \in [0, 1]$ **e.** $\gamma(t) = (4\cos t, \operatorname{sen} t)$ **f.** $\gamma(\theta) = (\operatorname{sen}^2\theta, \cos^2\theta)$
g. $\gamma(t) = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t),\ t \geq 0$ **h.** $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ **i.** $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + \operatorname{sen} t)$

2. Faça um esboço do traço (ou trajetória) das seguintes curvas espaciais:

a. $\gamma(t) = (1, 1, t),\ t \geq 0$ **b.** $\gamma(t) = (1, t, t),\ t \geq 0$ **c.** $\gamma(t) = (t, t, \frac{1}{t}),\ t > 0$
e. $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$ **f.** $\gamma(t) = (t, t, \cos t),\ t \geq 0$

3. Dê uma parametrização para cada umas das curvas planas abaixo:
a. $x^2 + y^2 = 4$ **b.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **c.** $(x + 2)^2 + y^2 = 3$

4. Determine a reta tangente à trajetória de cada curva dada, no ponto indicado.
a. $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ t)$, no ponto $\gamma(\pi/6)$.
b. $\gamma(t) = (\frac{1}{t},\ \frac{1}{t},\ \frac{1}{t^2})$, no ponto $\gamma(2)$.

5. Considere a função $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Deter mine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja trajetória seja igual ao gráfico de f.

6. a. Encontre uma parametrização para a curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = y$.
b. Determine uma equação da reta tangente à trajetória da curva acima no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

7. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t\ \cos t)$ tem duas retas tangentes em $(0, 0)$ e ache suas equações.

II. Sobre funções de duas ou mais variáveis

1. Determine e represente graficamente o domínio de cada uma das funções abaixo.
a. $f(x, y) = ln(x^2 + y^2 - 1)$ **b.** $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2x - y}$ **c.** $z = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{4x - y}$
d. $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right)$ **e.** $z = ln(xy^2 - x^3)$ **f.** $f(x, y) = \sqrt{x - y}$

2. Esboce a família de curvas de nível das funções f (*Não se esqueça de determinar o domínio de f*)

a. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ **b.** $f(x,y)=1-x^2-y^2$ **c.** $f(x,y)=y^2-x^2$ **d.** $f(x,y)=x^2$

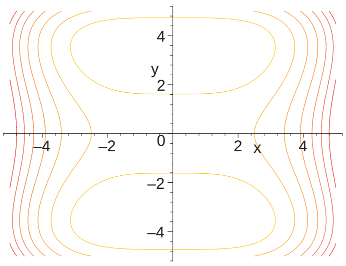
e. $f(x,y)=(x-y)^2$ **f.** $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ **g.** $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ **h.** $f(x,y)=x-\sqrt{1-y^2}$

3. Esboce os gráficos das funções abaixo:

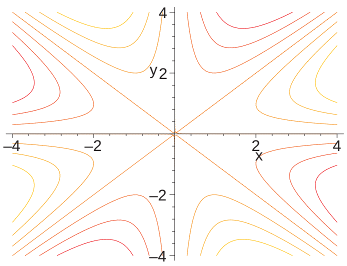
a. $z=1-x^2-y^2$ **b.** $z=y^2-x^2$ **c.** $z=y^2+1$ **d.** $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

e. $f(x,y)=4x^2+y^2$ **f.** $f(x,y)=x^2+y^2+2y+3$ **g.** $z=e^{-x^2-y^2}$ **h.** $z=1-x-y$

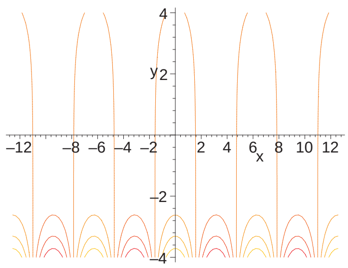
4. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.



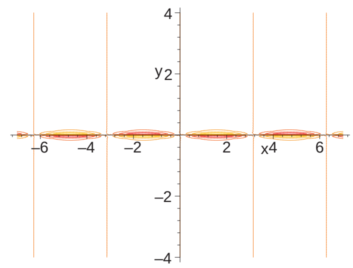
(I)



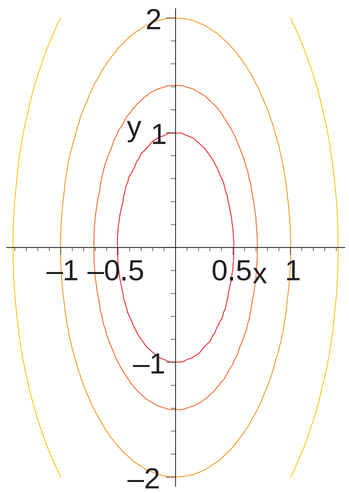
(II)



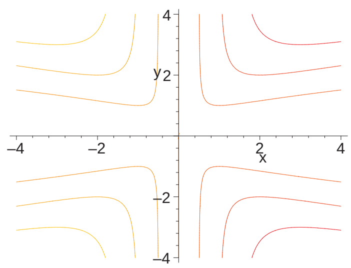
(III)



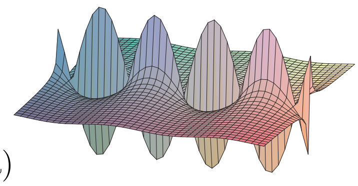
(IV)

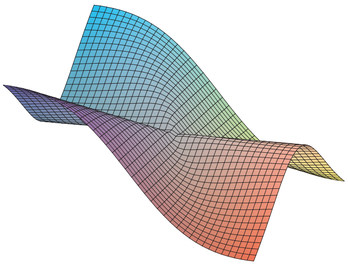


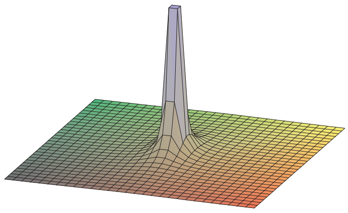
(V)

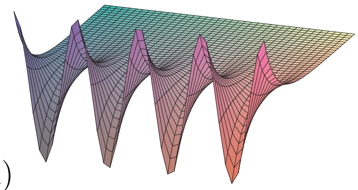


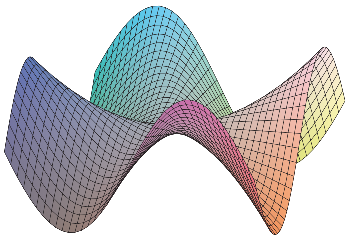
(VI)

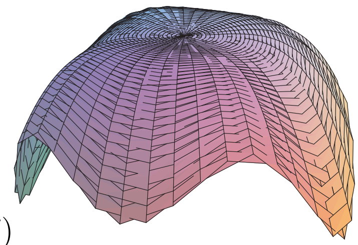

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

5. Sejam a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ e a curva $\gamma(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+4})$, $t \geq 0$. Mostre que a trajetória (ou a imagem) da γ está contida no gráfico de f e faça um esboço dessa trajetória.

6. Dadas as funções abaixo , determine o domínio de cada uma delas e descreva as suas superfícies de nível.
a. $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ **b.** $f(x,y,z) = \sqrt{3-z}$ **c.** $f(x,y,z) = x^2-y^2+z^2$

7. • Seja $y = f(x)$ uma função definida em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. O gráfico de f é, por definição, o conjunto formado pelos pontos (x,y), com $y = f(x)$ e $x \in A$. Ele pode ser também entendido como a curva de nível $c = 0$ de uma função de 2 variáveis G dada, por exemplo, por $G(x,y) = y - f(x)$, com $x \in A$ e $\forall y \in \mathbb{R}$.
De fato, a curva de nível 0 de G é dada por $G(x,y) = y - f(x) = 0$, ou seja, é formada pelos pontos do plano $(x, f(x))$, que constituem o gráfico de f.
Por exemplo, a curva $y = x^2$, que é o grafico da função $f(x) = x^2$, pode ser entendida como a curva de nível 0 da função $G(x,y) = y - x^2$. Observe que também a curva $y = x^2$ pode ser vista como a curva de nível 1 da função $G_1(x,y) = y - x^2 + 1$.

• Seja a função $z = f(x,y)$, definida em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Como acima, o gráfico de f que é o conjunto formado pelos pontos do espaço da forma $(x,y,f(x,y))$, com $(x,y) \in A$ pode ser visto como a superfície de nível $k = 0$ de uma função F de 3 variáveis reais dada por $F(x,y,z) = f(x,y) - z$, com $(x,y) \in A$ e $\forall z \in \mathbb{R}$.
7.1. Determine para cada uma das funções f abaixo, a função G de 2 variáveis da qual o gráfico de f é uma sua curva de nível.
a. $y = 2$ **b.** $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ **c.** $f(x) = \sqrt{x^2-2}$.
7.2. Determine para cada uma das funções f abaixo, a função F de 3 variáveis da qual o gráfico de f é uma superfície de nível de F.
a. $f(x,y) = 2$ **b.** $z = x^2 + y^2$ **c.** $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} + 1$ **d.** $f(x,y) = y^2 - 2$.