1a. Lista de Exercícios de MAT 121 - Cálculo II
Bacharelado de Física- 2o. semestre de 2010 - Noturno - Turma 24
Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Integrais definidas e aplicações

1. Verifique quais das funções abaixo são integráveis. Justifique.

a. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } 0 < x \leq \pi/2 \end{cases}$

b. $f(x) = e^{-x^2}$, com $x \in [0, 4]$.

c. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } 0 < x \leq 2/\pi, \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0, \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

f. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, com $x \in [2, 5]$

2. Calcule as integrais definidas indicadas abaixo:

1. $\displaystyle\int_1^3 ln\, x\, dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\, u\ du$ **3.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^3}\ dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{-x^2}\ dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x+1}\ dx$ **6.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\ ln\, x\ dx$ **7.** $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x|\ dx$ **8.** $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1}\ dx$

9. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\ \text{sen}(x^2+1)\ dx$ **10.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-5)^5}}\ dx$

3. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{n} + \text{sen}\,\frac{2\pi}{n} + ... + \text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$

4. Considere a parábola $y = ax^2$, com $a \geq 1$. Desenhe a região plana compreendida entre a parábola e a reta $y = x$, com $0 \leq x \leq 1$. Calcule a área dessa região em função de a.

5. Calcule a área da região $R = \{(x,y) \in I\!R^2 : y \geq x^2 - 1 \;\text{ e }\; y \leq x + 1\}$

6. Sejam $f : [-1, 3] \to I\!R$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1, 3]$, e os conjuntos $A = \{(x,y) \in I\!R^2 : -1 \leq x \leq 3 \; e \; y \geq f(x)\}$ e $B = \{(x,y) \in I\!R^2 : -1 \leq x \leq 3 \; e \; y \leq x^2 + 3\}$.
Supondo que a área de $A \cap B$ seja igual a 23 u.a., calcule a $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\; dx$.

7. Calcule a área da região plana delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. (Desenhe a regiao)

8. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo $\mathcal{O}x$ do conjunto:

a. $A = \{(x,y) : \dfrac{1}{x^2} \leq y \leq x \;\text{ e }\; 1 \leq x \leq 2\}$. **b.** $A = \{(x,y) : y \geq \sqrt{x} \quad e \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

c. $A = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \;\; e \;\; y \geq 0\}$ **d.** $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2 \;\; e \;\; e^{-x} \leq y \leq e^{x}\}$

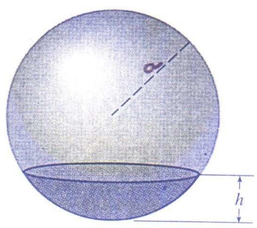
9. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação

a. em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

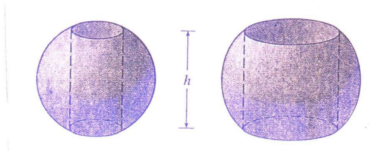
b. do conjunto $A = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 4 \;\; e \;\; 1 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ em torno da reta $x = 0$ (ou eixo $\mathcal{O}y$).

10. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a > 0$, para gerar um sólido , com a forma de um pneu. Esse sólido é denominado **toro**. Calcule seu volume.

11. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h , com $h \leq a$, de uma esfera de raio a. (ver figura)



12. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem o raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R. (ver figura)



II. Função integral

1. Determine a função derivada de:

a. $F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{2t}{3+2t^8}\ dt$ **b.** $F(t) = \int_0^t \cos(2x)\ dx$ **c.** $G(u) = \int_1^{u^2} \sec(2t^2 - 2t)\ dt$

d. $F(x) = x^2 \int_{2x}^{x^2} e^{-t^2}\ dt$ **e.** $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \operatorname{sen}(t^3)\ dt$ **f.** $f(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\ dt$

2. Mostre que $f'(x) - x\, f(x) = 1$, para todo $x \in I\!R$, onde f é a função em II.1.f.

3. Seja $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\ dt$. Calcule $\int_0^2 x\, F(x)\ dx$, em função de $F(2)$.
(sugestão, use integral por partes).

4. Suponha que $x \operatorname{sen}(\pi\, x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$, onde f é uma função contínua. Determine o valor de $f(4)$, justificando seu cálculo.

III. Aplicações com um pouco de Física

1. *Trabalho.* Quando uma **força constante** de intensidade F é aplicada na direção do movimento de um objeto e esse objeto é deslocado de uma distância d, definimos o **trabalho** W realizado pela força sobre o objeto por $W = F.d$, se a força age no sentido do movimento e por $W = -F.d$, se ela age no sentido oposto. Suponha agora que um objeto está se movendo na direção positiva ao longo do eixo x, sujeito a uma **força variável** $F(x)$. Defina o trabalho W realizado pela força sobre o objeto quando este é deslocado de $x = a$ até $x = b$, e encontre uma fórmula para calculá-lo.

2. *Energia cinética.* Use as notações do exercício anterior, a segunda lei de Newton e a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}$$

para mostrar que o trabalho realizado por uma força F atuando sobre uma partícula de massa m que se moveu de x_1 até x_2 é

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2,$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades do corpo em x_1 e x_2.

Em Física, a expressão $\frac{1}{2}\,m\,v^2$ é chamada de **energia cinética** de um corpo em movimento com velocidade v. Portanto, o trabalho realizado por uma força é igual à variação da energia cinética do corpo e podemos determinar o trabalho calculando esta variação.

3. Suponha que uma partícula se desloca ao longo do eixo $0x$, segundo uma função horária $x : [t_0, t_1] \to I\!R$ e sob ação de uma força $f(x)\,\overrightarrow{i}$, dada $f : I\!R \to I\!R$ contínua.
Admita que a dinâmica da partícula é governada por um modelo relativístico: sua massa m depende da sua velocidade v, segundo a função $m :]-c, c[\to I\!R$ definida por:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

onde $c > 0$ é a velocidade da luz e $m > 0$ a massa de repouso e a função horária x satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\Big(m(x'(t))x'(t)\Big) = f\big(x(t)\big).$$

Mostre que, se interpretarmos o trabalho $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ realizado pela força f quando a partícula se desloca de $x_0 = x(t_0)$ a $x_1 = x(t_1)$ como variação de energia ΔE, e se $\Delta m = m\big(x'(t_1)\big) - m\big(x'(t_0)\big)$, então:

$$\Delta E = \Delta m\; c^2.$$

(*Sugestão:* Use o teorema de mudança de variáveis na integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo.)