## 5a. Lista de Exercícios de MAT 111 - Cálculo I
## Bacharelado de Física Noturno - 1o. sem.2006 - Turma 22

**I- Sobre funções contínuas em intervalo fechado, T.V.M. e suas aplicações**

**1.** Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

**2.** Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:
**a.** $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |b - a|$, $\forall a,\ b \in R$; **b.** $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, $\forall x,\ y \in R$, $x,\ y \geq 1$;

**c.** $e^a - e^b \geq a - b$, para todo $a$, $b$, com $a > b > 0$.

**3.** Seja $f$ uma função derivável em um intervalo $]a, +\infty[$ e suponha que $a < 0$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x$, para todo $x > 0$.

**4.** Mostre que a função $f(x) = x^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x \geq e$.

**5.** Prove as seguintes desigualdades:

**a.** $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $\forall\, x > 1$; **b.** $e^\pi > \pi^e$; **c.** $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $\forall\, x > 0$;

**6.** Esboce o gráfico das funções indicadas abaixo, utilizando para isso o estudo do crescimento/decrescimento, estudo de máximos e mínimos locais (globais), estudo da concavidade/pontos de inflexão e os limites que se fizerem necessários.

**a.** $y = x^3 - x$ **b.** $y = x^3 - x^2 + 1$ **c.** $y = x^4 + 2x^3 + 1$ **d.** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e.** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

**f.** $y = \dfrac{9}{x^2 + 9}$ **g.** $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$ **h.** $y = e^{-x^2/2}$ **j.** $y = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$ **k.** $y = \sqrt{x^2 - 4}$

**l.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ **m.** $f(x) = x\,e^{-3x}$

**7.** Mostre que
**a.** $e^x > \dfrac{x^2}{2}$, para todo $x \geq 0$; **b.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. (Use o ítem a.)

**8.** Usando o estudo do crescimento/decrescimento e o Teorema do anulamento, prove que:
**a.** a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ tem três raízes distintas e localize-as.
**b.** a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real e localize-a.
**c.** a equação $x^3 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-1, 1]$.

**9.** Determine $c$ para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

**10.** Calcule os limites indicados abaixo:

**a.** $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$ **b.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ **c.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ **d.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{e^{3x}}$

**e.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ **f.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x e^{-x^2}$ **g.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x e^x}{e^{x^2}}$ **h.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$

**i.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}$ **j.** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\, e^{1/x}$ **k.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{p}{x}\right)$

**11.** Esboce o gráfico das funções:

**a.** $y = \dfrac{ln\, x}{x}$ **b.** $y = \dfrac{e^x}{x}$ **c.** $y = x\, e^{-x^2/2}$ **d.** $y = x^x$

### II. Sobre Máximos e Mínimos

**1.** Seja $f$ uma função definida e derivável em $I\!R$ e seja a função $g$ dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que $p \neq 0$ é um ponto de máximo (ou de mínimo) local de $g$.
**a.** Prove que $pf'(p) - f(p) = 0$.
**b.** Prove que a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abscissa $p$ passa pela origem.

**2.** Considere a função $y = x^3 + x^2 - x + 1$.
**a.** Estude seu comportamento com relação aos pontos de máximo e de mínimo locais. Algum deles é um ponto de máximo ou de mínimo global?
**b.** Considere agora a função dada restrita ao intervalo $I = [-2, -\frac{1}{2}]$. Determine o valor máximo e o valor mínimo de $y$ em $I$.

**3.** Achar, caso existam, os valores máximo e mínimo de:
**a.** $f(x) = \dfrac{1}{x} + ln\, x$, com $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$; **b.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 1]$

**4.** Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas retangulares sem tampa de pedaços quadrados de papelão com 12 cm de lado, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando para cima as abas resultantes. Ache o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para se obter uma caixa de maior volume possível.

**5.** Quais os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ em que a soma das distâncias a $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ é mínima?

**6.** Ao meio dia, um barco $A$ está a 50 milhas ao Norte do barco $B$, dirigindo-se para o Sul a 16 milhas/h. O barco $B$ está indo para Oeste à 12 milhas/h. Em que instante eles ficarão o mais próximo possível um do outro e qual é a distância mínima entre eles?

**7.** (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desse exercício é provar como a *lei de refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como consequência do *princípio de Fermat*, segundo o qual a " trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso ".
Sejam $P \in I\!R^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in I\!R^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (ver figura). Uma partícula vai de $P$ a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo $x$ com velocidade constante $u$ e movimento retilíneo; em seguida, vai de $M$ até $Q$ com velocidade constante $v$, também em movimento retilíneo. Seja $T : I\!R \to I\!R$ tal que , para todo $x \in I\!R$, $T(x)$ denota o tempo de percurso de $P$ até $Q$. Mostre que $T$ possui um único ponto de mínimo $x_o \in I\!R$. Verifique que $x_o \in ]0, b[$ e que, se $x = x_o$, então:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{u} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v}.$$