4a. Lista de Exercícios de MAT 111 - Cálculo I
Bacharelado de Física - 1$^{o.}$ sem. 2006 - Turma 22

I. Sobre Derivadas

1. Dadas as funções f abaixo, determine os pontos do D_f em elas têm derivadas e nesses pontos determine f'. Esboce o gráfico de f e de f'.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{se } x \geq 1, \\ 5x - 1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 2x + 1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1. \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} sen\, x & \text{se } x \leq 0, \\ x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

2. Considere a função f abaixo: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{x-2} & \text{se } 0 < x < 2, \\ x + 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$

a. f é contínua em $x = 0$ e $x = 2$? Justifique.
b. f é derivável em $x = 0$ e $x = 2$? Justifique.

3. Verifique se f é derivável (diferenciável) no ponto x_o indicado; nos casos em que f é derivável em x_o, determine $f'(x_o)$:

a. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad x_o = 0.$

b. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad x_o = 0.$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x & \text{se } x > 0, \\ x^5 + 4x^3 & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad x_o = 0.$

d. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1, \\ 1 & \text{se } x \leq 1. \end{cases} \quad x_o = 1.$

4. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos[(3+x)^2] - \cos 9}{x}$. Qual é a interpretação desse limite ?

5. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função tal que $-x^2 + 2x \leq f(x) - 4 \leq x^2 - 2x + 2$, para $\forall x \in I\!R$.
a. Calcule $f(1)$ e mostre que f é contínua em $x = 1$.
b Existe o $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$? E f é derivável em $x = 1$?

6. Calcule, onde existir, a função derivada das funções f indicadas abaixo:

a. $f(x) = \dfrac{x-1}{1+2x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x+2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{1}{x^3+2}$

d. $f(x) = x^2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2}$ **e.** $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$ **f.** $f(x) = x^e - e^x$

g. $f(x) = x^2 ln\, x - x\, e^x$ **h.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$ **i.** $f(x) = \dfrac{ln\, x}{x} + e^3$

j. $f(x) = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{4}{3x} + \dfrac{e^x}{x^2}$ **k.** $f(x) = \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{2x+1}{x}$ **l.** $f(t) = \dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1}$

7. Considere a função $f(x) = x|x|$.

a. Determine $f'(x)$, para $x > 0$. Qual a taxa de variação de f em $x = 3$?

b. Determine $f'(x)$, para $x < 0$? Qual a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$?

c. Analise se f é derivável em $x = 0$.

8. Considere a curva $y = x^2 - 3x$.
a. Determine a equação de sua reta tangente pelo ponto $(1, -2)$.
b. Quantas são as retas que passam por $(0, -2)$ e são tangentes à curva dada? Em que pontos tais retas tocam a curva? Esboce a curva e as retas.

9. a. Ache os pontos sobre a curva $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10$ nos quais a reta tangente é horizontal.
b. Determine uma reta que é tangente à curva $y = x^3 + 3x$ e paralela à reta $y - 6x - 1 = 0$.

II. Mais derivadas e Regra da cadeia

1. Calcule o valor de $f'(x)$, das funções f dadas abaixo, de duas formas diferentes: uma forma sem utilizar a Regra da Cadeia e a outra utilizando-a:

a. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ **b.** $f(x) = \cos(2x)$ **c.** $f(x) = e^{2x}$ **d.** $f(x) = ln^2 x$ **e.** $f(x) = ln\, x^2,\ x > 0$

2. Seja $f\colon I\!R \to I\!R$ uma função derivável num ponto $p \in [0, +\infty[$. Calcule, em termos de $f'(p)$, o limite: $\displaystyle\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{\sqrt{x} - \sqrt{p}}$.

3. Determine $\dfrac{dy}{dx}$, onde existir, para as funções dadas abaixo, simplificando, quando possível, o resultado:

a. $y = x^2\, ln\, x$ **b.** $y = \operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen}^2 x$ **c.** $y = \operatorname{cotg}(3x^2+5)$ **c1.** $\sqrt{x^3-3x}$

d. $y = \sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ **e.** $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$ **f.** $y = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}$ **g.** $y = x^{\pi^2} - \pi^{x^2}$

h. $y = ln(\cos x)$ **i.** $y = x \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5} - x^2\right)$ **j.** $y = e^{\sqrt{x}} + e^2$ **k.** $y = \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$

l. $y = ln(x^2-2x)$ **m.** $y = ln(ln\, x)$ **n.** $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ **o.** $y = x\, e^{-x^2}$

p. $y = x\, ln\sqrt{x}$ **q.** $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ **r.** $y = \sqrt[3]{\sec^2 x}$ **s.** $y = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$

t. $y = e^{\operatorname{sen} 2x} + \pi^2$ **u.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{2x+3}} + \pi^2$ **v.** $y = \dfrac{2}{(2x+1)^5} - \dfrac{4x-5}{11}$

x. $y = ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **y.** $y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$ **z.** $y = t^2 + x - xt + 1$

4. Sejam f e g funções deriváveis em $I\!R$ e tais que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in I\!R$. Sabendo-se que $f(1) = 2$ e $g(0) = 1$, calcule o valor de $g'(0)$.

5. Seja $f\colon I\!R \to I\!R$ uma função derivável até a 2^a ordem. Considere a função $g\colon I\!R \to I\!R$ dada por $g(x) = f(3\cos(-x) + x)$, para todo $x \in I\!R$.
a. Calcule $g''(x)$. **b.** Calcule $g''(0)$, supondo que $f(3) = -1$, $f'(3) = 3$ e $f''(3) = 7$.

6. Calcule a derivada indicada em cada caso:
a. y'' se $y = \dfrac{x}{1-x}$; **b.** y'' se $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$; **c.** $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;

d. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)$; **e.** $\dfrac{d^{500}}{dx^{500}}\left(x^{131} - 3x^{79} + 4\right)$.

7. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita:
a. $x = y - y^7$; **b.** $x^4y^3 - 3xy = 60$.

8. Determine as retas tangentes ao gráfico das funções dadas implicitamente pela equação $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$ nos pontos em que a abscissa $x = 2$.

9. Determine os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ cujas retas tangentes passam pelo ponto $(3, 0)$.

10. Encontre a equação da reta tangente à hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com $0 < a, b \in I\!R$, num ponto(x_o, y_o).

11. Seja $y = f(x)$ uma função derivável que satisfaz a equação $y^3 + xy^3 + 2 = 0$. Encontre a equação de uma reta perpendicular à reta $x + y = 1$ e que seja tangente ao gráfico de $y = f(x)$.

III- Aplicações - Taxas de variação

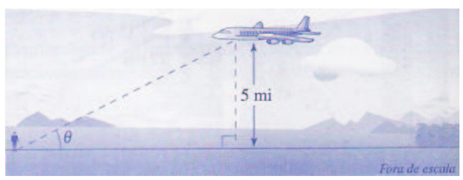
1. Mostre que a taxa de variação do volume da esfera, em relação ao seu raio, é numericamente igual à área da superfície da esfera.

2. A medida do lado de um quadrado varia com o tempo. No instante em que o lado mede $0,5$cm a taxa de variação da área é de $4\text{cm}^2/\text{s}$. Qual é a taxa de variação do lado em relação ao tempo neste instante?

3. NUm certo instante t_o, a altura de um triângulo crece à razão de 1cm/min e sua área aumenta à razão de $2\text{cm}^2/\text{min}$. No instante t_o, sabendo que sua altura é de 10cm e sua área de 100cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo?

4. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone circular com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,2$m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081\text{m}^3/\text{min}$. Qual é a taxa de variação da altura do monte neste instante? (Volume do cone $= \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$, onde r denota o raio da base e h a altura)

5. (*Ângulo de elevação*) Um avião está voando a uma altitude de 5 milhas em direção a um ponto diretamnete sobre um observador no solo (ver figura abaixo). A velocidade do avião é de 600 milhas por hora. Calcule a taxa de variação do ângulo de elevação θ quando este ângulo for de 30^o.



6. Ao meio dia o barco A está a 64km a oeste do barco B. O barco A navega para leste a 20km/h e o barco B para o norte a 25km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às 13h12?

7. Uma luz está no alto de um poste de 5m, como na figura abaixo. Um menino de $1,60$m de altura se afasta do poste. Quando ele está a 6m do poste, sua velocidade é de $1,20$m/s. A que taxa se move a ponta de sua sombra quando ele está a 6m do poste? A que taxa aumenta o comprimento da sua sombra quando ele está a 6m do poste?