2a. Lista de Exercícios de MAT 111 - Cálculo I
Bacharelado de Física - 1o. sem.2006 - Turma 22

Limites Finitos e Continuidade

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x-9}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0{,}001} \dfrac{x}{|x|}$
4. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2+x-56}{x^2-11x+28}$
5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
6. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$
7. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t \operatorname{sen} t}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3-x^2+1}{x^2+x-2}$
9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{sen(x^2-3x+2)}{x-2}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+\frac{1}{x})-\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}(3x)\ \operatorname{cossec}(6x)$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$
15. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|\,x-1|}{x-1}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{sen}^3 x)(\operatorname{sen}\frac{1}{x})}{x^2}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\, 2x)}{x}$

2. Analise a resolução abaixo.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}^{\to 1} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x^2} = 0.$$

a. Usando uma calculadora, determine o valor de $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ para alguns valores pequenos de x (por exemplo, $x = 0{,}1$ e $x = 0{,}01$).

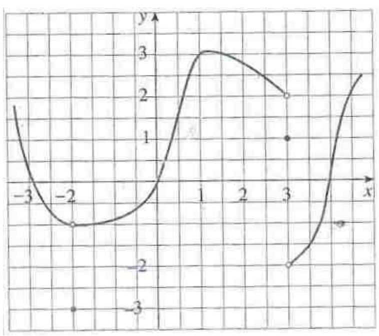
b. É possível mostrar com a teoria a ser estudada mais adiante neste curso que:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

para todo $x \geq 0$. Usando essa desigualdade, calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

3. Para a função f cujo gráfico está abaixo, calcule, caso exista:

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
e) $f(3)$
f) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$



4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\left|f(x)\right| \leq 2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x}$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $1 + x^2 + \dfrac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \dfrac{x^6}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

a. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$; b. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(f(x)\cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right)\right)$.

6. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

a. $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x \neq 3, \\ 2, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4), & \text{se } x > 2, \\ x^2+x-6, & \text{se } x < 2, \\ 0, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

7. Determine L para que a função dada seja contínua.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por que?

9. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Se $|f|$ é contínua, então f é contínua.

b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções descontínuas em $x = 0$ então a função fg é descontínua em $x = 0$.

c) Se $\displaystyle\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x)$ então f é contínua em p.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

a) Assumindo que $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x}$.

b) Assumindo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.