

**3ª Prova de MAT111 - Cálculo I**  
**Turma 22 - Bacharelado de Física Noturno - 30/06/2006**  
**1º semestre de 2006**

**1ª Questão:** (3,5) Seja a função  $y = y(x) = x^2e^{-x}$ . Esboce seu gráfico, **justificando** sua construção através do estudo dos intervalos de crescimento/decrescimento, da existência de máximos e mínimos locais/globais, dos intervalos de concavidade, da existência de pontos de inflexão, existência de raízes e dos limites necessários. **Justifique.**

**2ª Questão:** (2.0) Um motorista está dirigindo numa estrada de 200 km de extensão à margem de um deserto. O carro desenvolve uma velocidade de 100 km/h na estrada e de 60 km/h no deserto. O motorista está no ponto  $A$  (início da estrada) e quer atingir o ponto  $B$  que está a 40km do final da estrada. Determine o ponto  $C$  em que ele deve sair da estrada de forma a atingir  $B$  no menor tempo possível.  
(*Dica: chame de  $x$  a distância de  $C$  ao final da estrada.*)

**3ª Questão:** (2.0)

a) Considere a função  $g(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x$  no intervalo  $[0, \pi/2]$ . Mostre que  $g(x) < 0$ , para todo  $x \in ]0, \pi/2[$ .

b) Prove que  $\frac{\operatorname{sen} b}{b} < \frac{\operatorname{sen} a}{a}$ , sempre que  $0 < a < b \leq \pi/2$ .

**4ª Questão:** (2.5)

**I.** Considere as funções  $y = y(x)$  dadas implicitamente pela equação  $x^2 + xy + y^2 = 3$ . Determine os pontos sobre o gráfico de  $y = y(x)$  em que as retas tangentes são paralelas à reta  $2y + x = 1$ .

**II.** Prove que  $|\operatorname{sen}(\pi x^2)| \leq 2\pi|x - 1|$ , para todo  $x \in [0, 1]$ .  
(*Sugestão: use o TVM.*)