Sobre o número e

Definição: $$e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Uma motivação: *Juros Contínuos de* 100% *ao ano*

Uma quantia de C reais é aplicada à juros compostos a uma taxa de 100% ao ano.
a) Determine o montante após um ano supondo que os juros são capitalizados n vezes ao ano.
b) Supondo no caso a. que os juros são capitalizados continuamente, qual é o montante?
c) Qual será o montante após t anos, supondo que os juros são capitalizados n vezes ao ano? Como em b.) qual será o montante após t anos, supondo que os juros sejam capitalizados continuamente?

Uma solução para a.:

Após a $1^{a.}$ parcela, o montante é $M_1 = C\cdot(1+\frac{1}{n})$;

Após a $2^{a.}$ parcela, o montante é $M_2 = M_1(1+\frac{1}{n}) = C\cdot(1+\frac{1}{n})^2$;

Após a $3^{a.}$ parcela, o montante é $M_3 = M_2(1+\frac{1}{n}) = C\cdot(1+\frac{1}{n})^3$;

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Após a n-ésima parcela, o montante é $M_n = C\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Uma solução para b.:

O montante M pedido é o limite de M_n quando $n\to\infty$.

Ou seja, $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \lim\limits_{n\to\infty} C\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = C\,e$.

Uma solução para c.:

Sendo o montante ao final de um ano, relativo à capitalizaçãoo de n parcelas, igual a M_n, teremos então que após t anos, o montante de $n \cdot t$ parcelas, será de
$M_n(t) = C \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{nt}$.
E no caso de capitalização contínua dos juros o montante é

$$M(t) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} M_n(t) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nt} \quad = \quad Ce^t.$$

Uma aplicação mais geral *Juros Contínuos de α% ao ano*

Suponha que uma quantia C (em reais) é investida a juros compostos contínuos de $\alpha = 100k\%$ ao ano, com $0 < k \leq 1$, então, por analogia a aplicação anterior, o montante após t anos será

$$M(t) = \lim_{n\to\infty} C\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt} \overset{(*)}{=} C\,e^{kt}.$$

(*) Tomando $n = mk$, temos que $\dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{m}$ e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt} = \lim_{m\to\infty} C \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mkt} = \lim_{m\to\infty} C \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{kt} = C\,e^{kt}.$$

Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Vamos lembrar que:

• A função exponencial $y = a^x$ (ou $y = exp_a\, x$) é definida em $\mathbb{R}$ e sua imagem Im $=]0, +\infty[$.

• A função logarítmica $y = log_a\, x$ (inversa da exp_a) é definida em $]0, +\infty[$ e sua imagem Im$= \mathbb{R}$.

$$\text{Dado } x > 0, \ \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Propriedades da $\exp_a$

1. $a^0 = 1$ e $a^1 = a$

2. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $\forall x_1, x_2$

3. $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$, $\forall x_1, x_2$

4. $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$, $\forall x_1, x_2$

5. $\begin{cases} y = a^x \text{ é E.C, se } a > 1; \\ y = a^x \text{ é E.D, se } 0 < a < 1 \end{cases}$

Propriedades do $\log_a$

1. $log_a 1 = 0$ e $log_a a = 1$.

2. $log_a(x_1 \cdot x_2) = log_a x_1 + log_a x_2$, $\forall x_1, x_2 > 0$.

3. $log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = log_a x_1 - log_a x_2$, $\forall x_1, x_2 > 0$.

4. $log_a x^\alpha = \alpha \cdot log_a x$, $\forall x > 0$, $\forall \alpha$.

5. $\begin{cases} y = log_a x \text{ é E.C, se } a > 1; \\ y = log_a x \text{ é E.D, se } 0 < a < 1 \end{cases}$

6. Para $x > 0$ e $b > 0, b \neq 1$, $log_a x = \dfrac{log_b x}{log_b a}$ (mudança de base)

7. $\begin{cases} a^{log_a x} = x, \ \forall x > 0 \\ log_a(a^x) = x, \ \forall x \end{cases}$

Gráficos das funções exponencial e logaritmica

1. Caso na base $a > 1$:

2. Caso na base $0 < a < 1$:

Um limite fundamental e limites relacionados

- $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e \quad (n \in I\!N, n \geq 1)$

A. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

B. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- **a.** $\lim_{u\to 0^+}\left(1 + u\right)^{1/u} = e$

- **b.** $\lim_{u\to 0^-}\left(1 + u\right)^{1/u} = e$

- **c.** $\lim_{u\to 0}\left(1 + u\right)^{1/u} = e$ (consequência de a. e b.)

- **d.** $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

- **e.** A função $f(x) = e^x$ é derivável e $f'(x) = e^x$.

- **f.** A função $g(x) = ln\, x$, com $x > 0$, é derivável e $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.